

인공지능수학. 1. 인공지능 관련 수학 개념	고등학교	
	학번, 이름:	

0. INTRO

인공지능 수학에서는 텍스트나 이미지로 이루어진 여러 자료를 다룰 것이다. 이 때 텍스트와 이미지는 각각 벡터와 행렬이라는 수학적 수단을 이용하여 표현된다. 또한 인공지능의 정확도를 개선하는 수학적 과정에는 미분이 활용된다. 이와 같이, 인공지능에 쓰이는 대표적인 수학 개념인 벡터, 행렬, 미분을 배워보자 한다.

0.1 목차

1. 벡터	
1.1 좌표평면과 좌표공간	...1쪽
1.2 벡터	... 3쪽
2. 행렬	
2.1 행렬의 뜻	... 6쪽
2.2 행렬의 연산	...7쪽
3. 미분	
3.1 함수의 극한	...8쪽
3.2 평균변화율	...8쪽
3.3 미분계수	...9쪽
3.4 다항식의 미분계수	...10쪽

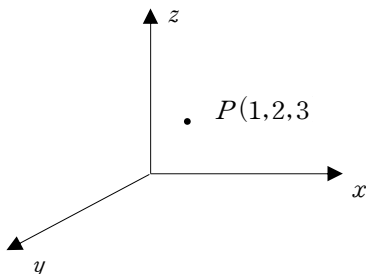
1. 벡터

1.1 좌표평면과 좌표공간

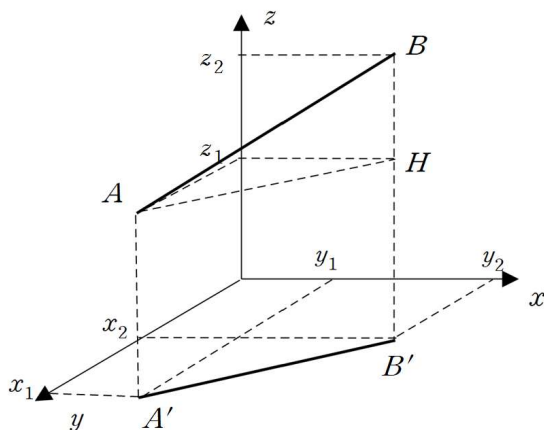
여기서는 텍스트와 관련된 수학적 개념인 벡터에 대해서 배운다. 먼저 좌표평면 상의 두 점 사이 거리를 구하는 과정부터 출발해 보자.

[문제1] 좌표평면 상의 두 점 $A(1,3)$, $B(2,5)$ 사이의 거리를 구하시오.

이제, 평면을 확장한 공간에서 생각해 보자. 좌표평면에 그림과 같이 x 축, y 축과 수직인 새로운 z 축을 추가하면 좌표평면을 **좌표공간**으로 확장할 수 있다. 좌표공간에서의 임의의 점은 (a,b,c) 와 같이 세 개의 성분을 갖는 순서쌍으로 나타낸다. 이 순서쌍을 점의 **공간좌표**라고 한다.



이번에는 좌표공간에서 두 점 사이 거리를 구해 보자. 두 점 $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ 에 대해,



A, B 에서 xy 평면에 내린 수선의 발을 각각 A', B' 라고 하자. 그러면 선분 $A'B'$ 의 길이는 두 점 사이 거리 공식에 의해,

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

이다. 한편, 점 A 에서 선분 BB' 에 그은 수선의 발 H 에 대해,

$$\overline{A'B'} = \overline{AH}$$

이다.

그리고, 선분 BH 의 길이는 $|z_2 - z_1|$ 이므로, 직각삼각형 ABH 에서 피타고라스 정리에 의해,

$$\overline{AB}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{BH}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

따라서 $\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ 이다.

개념

좌표공간의 두 점 $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ 사이의 거리 $d(A, B)$ 는 아래와 같이 구한다.

$$d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

[문제2] 세 점 $A(2, 3, 1)$, $B(4, -1, 2)$, $C(5, 0, 3)$ 에 대해 가장 가까운 두 점을 고르시오.

이와 같이, 평면 또는 공간 상에서 점을 순서쌍 즉 좌표로 나타내면 점들 사이의 거리를 구하고 나아가, 점들의 멀고 가까움을 논할 수 있다.

일반적으로 평면을 2차원 공간, 공간을 3차원 공간이라 일컫는다. 이제 4차원 이상의 공간을 생각해 보자. 4차원 이상의 공간은 우리 눈에 보이지 않지만, 수학을 이용하여 4차원 이상의 공간에서도 거리를 논할 수 있다.

[문제3] (열린 문제) 4차원 공간에서 점이 존재한다면 점의 위치를 어떻게 나타낼 수 있을까?

1.2 벡터

이제 일반적인 n 차원 공간을 다룰 것이다. 3차원 공간에서 눈에 보이는 ‘점’을 넘어서 개념을 정의할 필요가 있다. 이제부터는 ‘점’이라는 용어 대신 ‘벡터’라는 개념을 이용할 것이다.

개념

실수 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 에 대해 순서쌍 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 을 n 차원 벡터라 하고, $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 와 같이 나타낸다. (n : 자연수) 각각의 a_i 를 벡터 $\vec{a}$ 의 i 번째 성분이라고 한다. ($1 \leq i \leq n$)

[문제4] 주어진 5차원 벡터에서 3번째 성분을 구하시오.

(1) $\vec{a} = (1, 3, -2, 4, 5)$

(2) $\vec{b} = (-5, 2, 3, -7, 0)$

두 벡터가 서로 같은지 여부는 아래와 같이 논한다.

개념
두 n차원 벡터 $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$에 대해, 다음이 성립한다. $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \text{모든 } i \text{에 대해 } a_i = b_i \quad 1 \leq i \leq n$

숫자끼리 사칙연산을 할 수 있듯이, 벡터끼리도 덧셈, 뺄셈 등의 연산을 수행할 수 있다. 나아가, 실수와 벡터를 곱할 수도 있는데 이를 정리하면 아래와 같다.

개념
두 n차원 벡터 $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, 임의의 실수 k에 대해 다음과 같다. 1) 벡터의 덧셈 : $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$ 2) 실수와 벡터의 곱셈 (벡터의 실수배) : $k\vec{a} = (ka_1, ka_2, \dots, ka_n)$

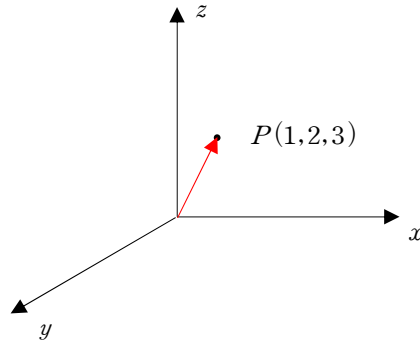
벡터의 덧셈, 실수와 벡터의 곱(벡터의 실수배)에 의해 벡터의 뺄셈을 아래와 같이 정의할 수 있다.

개념
두 n차원 벡터 $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$의 뺄셈은 아래와 같다. $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots, a_n - b_n)$

[문제5] 두 벡터 $\vec{a} = (1, -1, 3, 2)$, $\vec{b} = (5, -2, 5, -1)$ 에 대해 다음을 구하시오.

- (1) $\vec{a} + \vec{b}$
- (2) $\vec{a} - \vec{b}$
- (3) $2\vec{a}$

한편 2차원, 3차원 공간인 좌표평면, 좌표공간에서는 아래와 같이 벡터를 원점에서 출발한 화살표로 나타낼 수 있다.



이 때 벡터 $\vec{a} = (1, 2, 3)$ 을 $\overrightarrow{OA} = (1, 2, 3)$ 이라 나타내고 점 O 를 벡터 $\overrightarrow{OA}$ 의 **시점**, 점 A 를 벡터 $\overrightarrow{OA}$ 의 **종점**이라 한다. 그리고 화살표의 방향을 벡터 $\overrightarrow{OA}$ 의 **방향**, 화살표의 길이를 벡터 $\overrightarrow{OA}$ 의 **크기**라고 한다.

2. 행렬

2.1 행렬의 뜻

앞서, 여러 숫자를 한 줄에 담은 벡터가 여러 상황에서 수학적으로 유용하게 쓰인다는 것을 배웠다. 이번에는 여러 숫자를 한 줄이 아니라 하나의 직사각형에 여러 줄로 담아볼 것이다. 텍스트 자료를 벡터로 처리했던 것과 마찬가지로, 지금 우리가 배울 행렬을 이용하여 이미지 자료를 처리할 수 있게 된다.

개념

행렬이란, 수 또는 변수 등 일련의 개체들을 행과 열에 맞추어 직사각형 모양으로 순서 있게 나열한 것으로 2차원 구조를 갖는다. 이 때 행렬을 이루는 수 등의 개체를 그 행렬의 **성분**이라고 한다.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

← 제1행

← 제2행

← 제 m 행

↑ ↑ ↑

제1열 제2열 제 n 열

이와 같이 총 m 개의 행, n 개의 열로 이루어진 **행렬의 크기**를 $m \times n$ 이라고 하며 그러한 행렬을 **$m \times n$ 행렬**이라고 한다.

특히, 행렬 A 의 i 행 j 열에 있는 성분을 행렬 A 의 (i, j) 성분이라고 하며 기호로 a_{ij} 라고 한다. 그러한 의미에서 행렬 A 를 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 으로 나타내기도 한다.

[문제6] 주어진 행렬에 대해 물음에 답하시오.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

- (1) 행렬 A 의 크기
- (2) 행렬 B 의 크기
- (3) 성분 a_{12}
- (4) 성분 b_{32}

2.2 행렬의 연산

두 행렬이 서로 같은지 여부는 아래와 같이 논한다.

개념
두 $m \times n$ 행렬 $A = (a_{ij})_{mn}$, $B = (b_{ij})_{mn}$에 대해, 다음이 성립한다. $A = B \Leftrightarrow \text{모든 } i, j \text{에 대해 } a_{ij} = b_{ij}$

[문제7] 주어진 두 행렬이 서로 같은 행렬일 때 a, b 의 값을 각각 구하시오.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ a & 2 & 5 \\ 8 & 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & b & 3 \\ 6 & 2 & 5 \\ 8 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

행의 개수와 열의 개수가 각각 같은 두 행렬은 서로 덧셈, 뺄셈 등의 연산을 수행할 수 있다. 그리고 임의의 행렬은 아래와 같이 실수와 곱할 수 있다.

개념
두 $m \times n$ 행렬 $A = (a_{ij})_{mn}$, $B = (b_{ij})_{mn}$, 임의의 실수 k에 대해, 다음이 성립한다. 1) $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{mn}$ 2) $A - B = (a_{ij} - b_{ij})_{mn}$ 3) $kA = (ka_{ij})_{mn}$

예) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ 에 대해, $A + B = \begin{pmatrix} 2+1 & 1+5 \\ 4+0 & 3+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$ 이다.

[문제8] 주어진 두 행렬에 대해 다음을 구하시오.

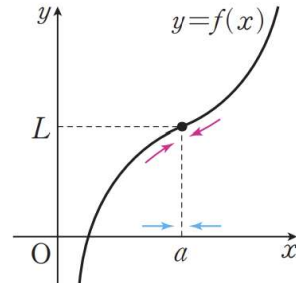
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 8 \\ 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

- (1) $A + B$
- (2) $B - A$
- (3) $3A$

3. 미분

3.1 함수의 극한

오른쪽 그림과 같은 함수 $y = f(x)$ 에서 x 의 값이 a 에 한없이 가까워질 때, 함수값은 L 에 한없이 가까워짐을 알 수 있다. 이를 아래와 같이 극한이라는 수학적 개념으로 정의한다.



개념

일반적으로 다항함수 $y = f(x)$ 에서 x 의 값이 a 가 아니면서 a 에 한없이 가까워질 때, 함수값은 L 에 한없이 가까워지면, 함수 $y = f(x)$ 는 L 에 수렴한다고 하고 이것을 기호로 아래와 같이 나타낸다.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \text{또는 } x \rightarrow a \text{ 일 때 } f(x) \rightarrow L$$

또, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ 일 때, L 을 함수 $y = f(x)$ 에서의 $x = a$ 에서의 극한값 또는 극한이라고 한다.

[문제9] 함수의 그래프를 이용하여 다음 극한값을 구하시오.

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} (2x - 1)$

(2) $\lim_{x \rightarrow 1} 2x^2$

3.2 평균변화율

다항함수 $y = f(x)$ 에서 x 의 값이 a 에서 b 까지 변할 때, 함수값은 $f(a)$ 에서 $f(b)$ 까지 변한다.

이 때, x 의 값의 변화량 $b - a$ 을 x 의 증분, y 의 값의 변화량 $f(b) - f(a)$ 를 y 의 증분이라 하고 이를 각각 기호로,

$$\Delta x, \Delta y$$

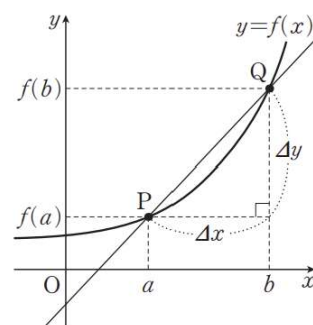
와 같이 나타낸다.

즉,

$$\Delta x = b - a,$$

$$\Delta y = f(b) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a)$$

이다.



그러면, x, y 의 증분을 이용하여 아래와 같이 x 의 값이 a 에서 b 까지 변할 때의 함수 $y = f(x)$ 의 변화율을 논할 수 있다.

개념
x 의 값이 a 에서 b 까지 변할 때의 함수 $y = f(x)$ 에서, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$ 를 x 의 값이 a 에서 b 까지 변할 때의 함수 $y = f(x)$ 의 평균변화율 이라고 한다.

이 때, $y = f(x)$ 의 평균변화율은 그래프 위의 두 점 $P(a, f(a))$, $Q(b, f(b))$ 를 지나는 직선 PQ 의 기울기와 같다.

[문제10] 함수 $f(x) = 3x^2$ 에서 x 의 값이 다음과 같이 변할 때의 평균변화율을 구하시오.

(1) -2에서 1까지

(2) 2에서 5까지

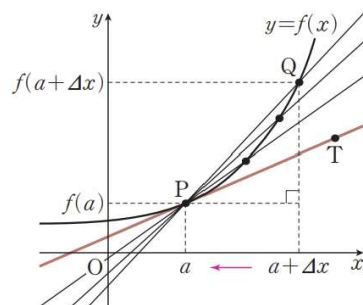
3.3 미분계수

다항함수 $y = f(x)$ 의 그래프 위의 두 점

$P(a, f(a))$, $Q(a + \Delta x, f(a + \Delta x))$ 에 대하여 $\Delta x \rightarrow 0$ 이면

점 Q 는 곡선 $y = f(x)$ 를 따라 점 P 에 한없이 가까워지고, 직선 PQ 는 오른쪽 그림과 같이 점 P 를 지나는 직선 PT 에 한없이 가까워짐을 알 수 있다.

이 직선 PT 를 점 P 에서의 곡선 $y = f(x)$ 의 **접선**이라 하고, 점 P 를 이 접선의 **접점**이라고 한다.



여기서 직선 PQ 의 기울기는 평균변화율 $\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$ 과 같으므로,

(접선 PT 의 기울기) = $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$ 가 성립한다. 이 때 우변의 극한값을 $x = a$ 에서의

다항함수 $y = f(x)$ 의 **미분계수** 또는 **순간변화율**이라 하고 이것을 기호로

$$f'(a)$$

라 나타낸다. 즉,

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

이고, 이 식에서 $x = a + \Delta x$ 라 하면,

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

를 얻는다. 이상을 정리하면 다음과 같다.

개념

다항함수 $y = f(x)$ 에서 $x = a$ 에서의 **미분계수** 또는 순간변화율 $f'(a)$ 에 대해 다음이 성립한다.

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

[문제11] $x = 1$ 에서 함수 $f(x) = 2x^2$ 의 미분계수를 구하시오.

3.4 다항함수의 미분계수

미분계수를 구하는 과정이 그렇게 쉽지만은 않다는 것을 느꼈을 것이다. 이번 절에서는 공식을 통해 쉽게 이차함수의 미분계수를 구해 볼 것이다.

[문제12] 이차함수 $f(x) = px^2 + qx + r$ (p, q, r 은 상수)의 $x = a$ 에서의 미분계수 $f'(a)$ 를 구하시오.

위 문제를 통하여 모든 이차함수의 미분계수를 구할 수 있다. 한편, 여기서 a 를 변수 x 로 바꾸면 $f'(x) = 2px + q$ 이므로, $f'(x)$ 는 x 에 대한 함수가 된다. 이 함수를 이차함수 $f(x) = px^2 + qx + r$ 의 도함수라고 한다.

개념

이차함수 $f(x) = px^2 + qx + r$ (p, q, r 은 상수)의 도함수는 $f'(x) = 2px + q$ 이다.

예) 이차함수 $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$ 의 도함수는 $f'(x) = 4x + 3$ 이다.

[문제13] 다음 이차함수에 대해 물음을 답하시오.

$$f(x) = 3x^2 + 4x + 7, \quad g(x) = -x^2 + 8x + 2$$

- (1) 도함수 $f'(x)$
- (2) 미분계수 $f'(3)$
- (3) 도함수 $g'(x)$
- (4) 미분계수 $g'(1)$