2026. 1학기. 학교연합 공동교육과정 고급수학I	학교:
01. [벡터] 벡터의 뜻	이름:

학습목표: 벡터의 뜻을 알고, 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 할 수 있다.

물건의 무게, 건물의 높이, 자동차의 속력 등은 하나의 실수로 그 양을 나타낼 수 있다. 그러나 물체에 작용하는 힘이나 물체가 움직이는 속도, 가속도 등은 크기뿐만 아니라 그것이 작용하는 방향도 함께 밝혀 주어야 그 양을 나타낼 수 있다. 이처럼 크기만 갖는 양을 **스칼라**, 크기와 방향을 함께 가지는 양을 **벡터**라 한다.

정의	스칼라, 벡터

스칼라 : 크기 만 갖는 양
벡터 : 크기 와 방향 을 함께 갖는 양

점 A에서 점 B로 향하는 화살표를 이용하여 벡터를 나타낼 수 있다.

정의	벡터 $\overrightarrow{AB}$ 의 시점, 종점, 크기

벡터는 점 A에서 점 B로 향하는 화살표를 사용하여 나타내고 이 벡터를 기호로 $\overrightarrow{AB}$ 와 같이 나타낸다.

– 벡터 $\overrightarrow{AB}$의 크기 : $\overline{AB}$ 의 길이
– 벡터 $\overrightarrow{AB}$의 시점 : 점 A, 벡터 $\overrightarrow{AB}$의 종점 : 점 B

벡터를 한 문자로 나타낼 때는 기호로

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \cdots$$

와 같이 나타내고, 벡터 $\vec{a}$의 크기는 $|\vec{a}|$와 같이 나타낸다.

정의	단위벡터

크기가 1 인 벡터를 단위벡터 라고 한다.

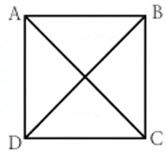
벡터는 평면, 공간에서 모두 생각할 수 있으며 평면과 공간에서의 벡터를 구별할 필요가 있을 때에는 이들을 각각 **평면벡터**, **공간벡터**라고 한다.

문제1 | 단위벡터

그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 $ABCD$에 대해, 물음에 답하여라.

(1) 단위벡터를 2개 이상 구하시오. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \cdots$

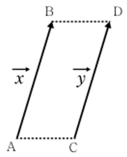
(2) 벡터 $\overrightarrow{AC}$의 크기를 구하시오. $\sqrt{2}$



정의 | 서로 같은 벡터

두 벡터 $\vec{x}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{y}=\overrightarrow{CD}$가 서로 같다

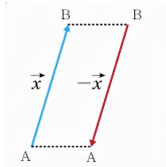
$\Leftrightarrow$ 두 벡터의 크기 와 방향 이 모두 같다.



정의 | 벡터 $-\overrightarrow{AB}$

벡터 $-\overrightarrow{AB}$: 벡터 $\overrightarrow{AB}$와 크기 는 같고, 방향 이 반대인 벡터.

즉, $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$이다.

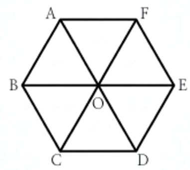


문제2

오른쪽 정육각형 $ABCDEF$에서 다음 벡터를 모두 구하여라.

(1) $\overrightarrow{AF}$와 같은 벡터 $\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{OE}, \overrightarrow{CD}$

(2) $\overrightarrow{OD}$와 크기는 같고 방향이 반대인 벡터 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{DO}$

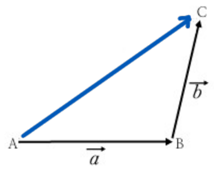


다항식끼리 덧셈, 뺄셈, 실수배 등의 연산을 할 수 있듯이 벡터끼리 또한 덧셈, 뺄셈, 실수배 등의 연산을 할 수 있다. 벡터의 덧셈은 아래와 같이 정의한다.

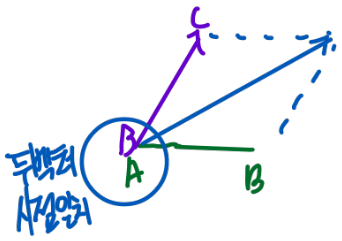
정의	벡터의 덧셈
두 벡터 $\vec{x}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{y}=\overrightarrow{BC}$에 대해, $\vec{x}+\vec{y}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=$ $\overrightarrow{AC}$	

이를 평면벡터로 나타내면 아래와 같다.

1) 벡터의 덧셈 방법1 (삼각형법)



2) 벡터의 덧셈 방법2 (평행사변형법)



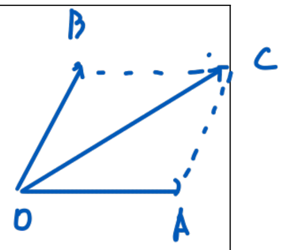
정리	벡터의 덧셈에 대한 연산법칙
세 벡터 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$에 대하여 다음이 성립한다. (1) (벡터 덧셈에 대한 교환법칙) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (2) (벡터 덧셈에 대한 결합법칙) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$	

[증명]

(1) 평행사변형 $OABC$에서 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$일 때,

$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=$ $\overrightarrow{OC}$.

그리고, $\vec{b}+\vec{a}=$ $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$. 따라서, 교환법칙이 성립한다.



(2) 생략.

정의	영벡터
벡터 $\overrightarrow{AA}$와 같이 시점 과 종점 이 일치하는 벡터를 영벡터 라고 하고, 기호로는 $\vec{0}$ 와 같이 나타낸다. 이 때, 영벡터의 크기는 0 이고, 그 방향은 생각하지 않는다.	

일반적으로 임의의 벡터 $\vec{a}$와 영벡터에 대해 다음이 성립한다.

정리	영벡터와 벡터의 덧셈

(1) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$

(2) $\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$

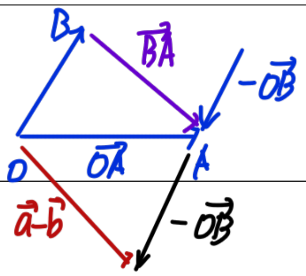
벡터의 뺄셈은 다음과 같이 정의한다.

정의	벡터의 뺄셈

두 벡터 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}, \vec{b}=\overrightarrow{OB}$에 대하여,

$\vec{a}-\vec{b}=$ $\overrightarrow{OA}$ + $(-\overrightarrow{OB})$

즉, $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=$ $\overrightarrow{BA}$.



벡터의 실수배는 다음과 같이 정의한다.

정의	벡터의 실수배

영벡터가 아닌 벡터 $\vec{a}$ 및 실수 k에 대하여, 벡터 $k\vec{a}$는 다음과 같다.

1) $k>0$이면, $\vec{a}$와 방향이 같고 크기가 $k|\vec{a}|$ 인 벡터이다.

2) $k<0$이면, $\vec{a}$와 방향이 반대이고, 크기가 $k|\vec{a}|$ 인 벡터이다.

3) $k=0$이면, $\vec{0}$이다.

또한, 임의의 실수 k에 대해, $k\vec{0}=\vec{0}$이다.

벡터의 실수배 연산에 대해 일반적으로 다음이 성립한다.

정리	벡터의 실수배에 대한 성질

실수 k, l, 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$에 대해 다음이 성립한다.

(1) (벡터 실수배에 대한 결합법칙) $k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}$

(2) (벡터 실수배에 대한 분배법칙) $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$

(3) (벡터 실수배에 대한 분배법칙) $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$

지금까지 배운 벡터 덧셈, 뺄셈, 실수배에 관한 성질들을 바탕으로 아래와 같이 벡터 식을 간단히 할 수 있다.

문제3	
$3(\vec{a}+2\vec{b})-(4\vec{a}-\vec{b})$를 간단히 하여라	

(식)$=3\vec{a}+6\vec{b}-4\vec{a}+\vec{b}$

$=-\vec{a}+7\vec{b}$

2026. 1학기. 학교연합 공동교육과정 고급수학I	학교:
02. [벡터] 위치벡터	이름:

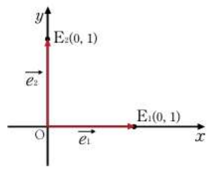
학습 목표: 평면과 공간에서 위치 벡터의 뜻을 알고, 벡터와 좌표의 대응을 이해할 수 있다.

평면 또는 공간에서 한 점 O를 시점으로 정하면 임의의 점 P에 대해 벡터 $\overrightarrow{OP}=\vec{p}$인 벡터 $\vec{p}$는 오직 하나로 정해진다. 이를 위치벡터라고 아래와 같이 정의한다.

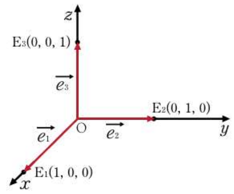
정의	위치벡터
점 O를 시점으로 하는 벡터 $\overrightarrow{OP}$를 점 O에 대한 점 P의 위치벡터라고 한다. 일반적으로 위치 벡터의 시점 O는 좌표 평면 또는 좌표 공간의 원점으로 잡는다.	

위치벡터를 이용하면 평면 또는 공간 상에서의 벡터를 조금 더 쉽게 다룰 수 있다.

평면 상의 두 점 $E_1(1,0), E_2(0,1)$에 대해 위치 벡터 $\overrightarrow{OE_1}, \overrightarrow{OE_2}$를 각각 단위벡터 $\vec{e_1}, \vec{e_2}$로 나타낸다.



공간 상의 세 점 $E_1(1,0,0), E_2(0,1,0)$, $E_3(0,0,1)$에 대해 위치 벡터 $\overrightarrow{OE_1}, \overrightarrow{OE_2}, \overrightarrow{OE_3}$를 각각 단위벡터 $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$로 나타낸다.



단위벡터 $\vec{e_1}, \vec{e_2}$를 이용하여 아래와 같이 벡터의 성분을 정의할 수 있다.

정의	평면벡터의 성분
좌표평면 상의 점 $A(a_1,a_2)$에 대해, 위치벡터 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$에 대해 아래가 성립한다. $\vec{a} = a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2} = (a_1, a_2)$ 이 때, 실수 a_1, a_2를 벡터 $\vec{a}$의 성분이라고 한다. (a_1: $\vec{a}$의 x성분, a_2: $\vec{a}$의 y성분)	

정의	공간벡터의 성분
좌표공간 상의 점 $A(a_1,a_2,a_3)$에 대해, 위치벡터 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$에 대해 아래가 성립한다. $\vec{a} = a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}+a_3\vec{e_3} = (a_1, a_2, a_3)$ 이 때, 실수 a_1, a_2, a_3를 벡터 $\vec{a}$의 성분이라고 한다. (a_1: $\vec{a}$의 x성분, a_2: $\vec{a}$의 y성분, a_3 : $\vec{a}$의 z성분)	

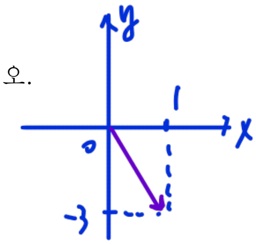
(예) 아래 벡터의 성분을 구하시오.

$\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ (단, $A = (3,5)$)

x성분: 3

y성분: 5

(예) 벡터 $\vec{x} = (1,-3)$를 좌표평면 상에 화살표로 나타내시오.



정리	두 평면벡터가 서로 같을 조건
$\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$일 때, $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow$ $a_1 = b_1,\ a_2 = b_2$.	

정리	두 공간벡터가 서로 같을 조건
$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$일 때, $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow$ $a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ a_3 = b_3$.	

평면벡터의 연산을 아래와 같이 성분을 이용해 쉽게 할 수 있다.

정리	평면벡터의 성분에 따른 연산
$\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$일 때, ① $\vec{a} + \vec{b} =$ $(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$ ② $\vec{a} - \vec{b} =$ $(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$ ③ $k\vec{a} =$ $(ka_1,\ ka_2)$ (단, k는 실수)	

공간벡터의 연산도 비슷하게 성립한다.

문제1	
$\vec{a} = (2,1)$, $\vec{b} = (-1,3)$일 때, 벡터 $\vec{c} = (3,5)$를 $m\vec{a} + n\vec{b}$의 형태로 나타내어라.	

$\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ 라 두자. 그러면,

$(3,5) = m(2,1) + n(-1,3)$

$\therefore (3,5) = (2m-n,\ m+3n)$

성분끼리 비교하면,

$\begin{cases} 2m-n=3 \\ m+3n=5 \end{cases}$

$\therefore m=2,\ n=1$

$\therefore$ (답): $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$

2026. 1학기. 학교연합 공동교육과정 고급수학I	학교:
03. [벡터] 벡터의 내적과 외적	이름:

학습목표: 벡터의 내적, 외적의 뜻을 알고 이를 활용할 수 있다.

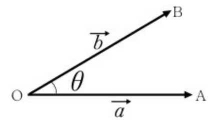
영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$의 내적을 다음과 같이 정의한다.

정의	벡터의 내적

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$가 이루는 각의 크기가 θ $(0 \le \theta \le \pi)$일 때,

두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$의 내적 : $\vec{a}\cdot\vec{b}$ = $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$.

또, $\vec{a} = \vec{0}$ 또는 $\vec{b} = \vec{0}$일 때는 $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ 으로 정한다.



문제1	

$|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$인 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$가 이루는 각의 크기가 다음과 같을 때, $\vec{a}\cdot\vec{b}$의 값을 구하여라.

(1) 0 $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 0$
$= 1\times2\times1 = 2$

(2) $\frac{\pi}{3}$ $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3}$
$= 1\times2\times\frac{1}{2} = 1$

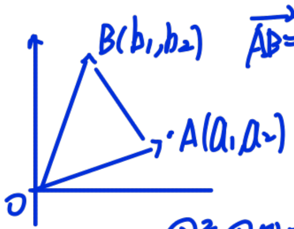
내적의 정의 뿐 아니라, 벡터의 성분을 이용하여 벡터의 내적을 구하는 방법이 있다.

정리	벡터의 성분을 이용하여 내적 구하기

① $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$일 때,
$\vec{a}\cdot\vec{b} =$ $a_1b_1 + a_2b_2$

② $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$일 때,
$\vec{a}\cdot\vec{b} =$ $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

(증명) $\triangle OAB$에서, $\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - 2\overline{OA}\times\overline{OB}\times\cos\theta$ (θ: $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 교각) ⋯ ①



$\left.\begin{aligned} \overline{AB}^2 &= |\overrightarrow{AB}|^2 = (a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2 \\ \overline{OA}^2 &= a_1^2+a_2^2 \\ \overline{OB}^2 &= b_1^2+b_2^2 \end{aligned}\right\}$ ②

②를 ①에 대입하면,

$(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2$
$= a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2 - 2\underbrace{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta}_{=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}$

양변을 정리하면,

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = a_1b_1 + a_2b_2$

문제2	

두 벡터 $\vec{a} = (2, -1)$, $\vec{b} = (k, 6)$에 대하여 $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$이 되도록 하는 실수 k의 값을 구하여라.

$2k - 6 = 0$

$\therefore k = 3$

정리	두 벡터가 이루는 각의 크기

두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$가 이루는 각의 크기를 $\theta\,(0 \le \theta \le \pi)$라 하면,

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

문제3	

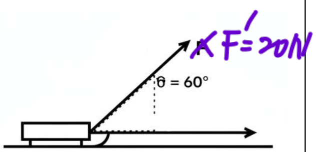
두 벡터 $\vec{a}=(1,0,-1), \vec{b}=(2,2,-1)$가 이루는 각 θ의 크기를 구하여라. (단, $0 \le \theta \le \pi$)

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{1\times2 + 0\times2 + (-1)\times(-1)}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}} = \frac{2+1}{\sqrt{2}\times3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\therefore\ \theta = \frac{\pi}{4}$.

문제4	

철수가 썰매에 끈을 묶고 어깨에 메고 바닥과 60°의 각도를 유지하며 $20\,N$의 일정한 힘으로 당긴다. 썰매가 $10\,\text{m}$ 앞으로 이동했을 때, 철수가 썰매가 앞으로 이동하는 데 쓴 일은 얼마인가?



힘의 작용 방향으로의 힘의 크기

참고: 일의 양 W, 힘의 크기 F, 이동거리 s ⟹ W = Fs

일 작용 방향으로의 힘의 크기 $F = F'\cos60^\circ$

$\therefore\ W = \underbrace{F'\cos60^\circ \times s}_{= \vec{F'}\cdot\vec{s}}$

$= 20\,N \times \frac{1}{2} \times 10\,m$

$= 100\,N\cdot m$

정리	벡터의 내적과 수직·평행 조건
영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$에 대하여, ① (수직 조건) $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow$ $\underline{\vec{a}\cdot\vec{b}=0}$ ② (평행 조건) $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow$ $\underline{\vec{a}\cdot\vec{b} = \pm|\vec{a}||\vec{b}|}$	

(증명)

① $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \cos\theta = 0 \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\overset{0}{\cancel{\cos\theta}} = 0$

② $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\underbrace{\cos\theta}_{\theta=0 \text{ or } \pi} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\times(\pm1) = \pm|\vec{a}||\vec{b}|$

수학적 유용성	
벡터의 내적이 필요한 이유를 자유롭게 설명해 보세요.	

벡터의 내적 또한 덧셈, 뺄셈과 같이 하나의 잘 정의된 연산으로서 아래와 같이 연산법칙이 성립한다.

정리	벡터의 내적에 대한 성질
세 벡터 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$와 실수 k에 대하여, ① (교환법칙) $\vec{a}\cdot\vec{b} =$ $\underline{\vec{b}\cdot\vec{a}}$ ② (분배법칙) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) =$ $\underline{\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}}$ $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} =$ $\underline{\vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}}$ ③ (결합법칙) $(k\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(k\vec{b}) =$ $\underline{k(\vec{a}\cdot\vec{b})}$	

좌표공간에서 두 벡터 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$의 외적을 다음과 같이 정의한다.

정의	벡터의 외적
일반적으로 두 공간벡터 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$에 대하여, $\vec{a},\vec{b}$의 외적 : $\vec{a}\times\vec{b}$ $=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$	

[참고](사루스의 법칙(Sattus' rule))

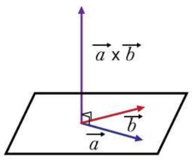
$$\left(\begin{array}{ccc|cc} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} & \vec{e_1} & \vec{e_2} \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \end{array}\right)$$

$$a_2b_3\vec{e_1}+a_3b_1\vec{e_2}+a_1b_2\vec{e_3}$$
$$-(a_2b_1\vec{e_3}+a_3b_2\vec{e_1}+a_1b_3\vec{e_2})$$
$$=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$$

문제5	
두 벡터 $\vec{a}=(1,2,2)$, $\vec{b}=(3,2,-1)$의 외적 $\vec{a}\times\vec{b}$을 구하여라.	

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} & \vec{e_1} & \vec{e_2} \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=(-2\vec{e_1}+6\vec{e_2}+2\vec{e_3})$$
$$-(6\vec{e_3}+4\vec{e_1}-\vec{e_2})$$
$$=(-6,7,-4)$$

문제6	
두 벡터의 외적 $\vec{a}\times\vec{b}$이 두 벡터 $\vec{a},\vec{b}$ 모두에 각각 수직임을 보이시오. 	

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a}=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)\cdot(a_1,a_2,a_3)$$
$$=\cdots=0$$

문제7	
임의의 공간벡터 $\vec{a}$에 대해, $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$임을 보여라.	

생략. 스스로.

정리	벡터의 외적의 크기

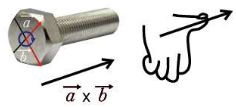
두 공간벡터 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$가 이루는 각을 θ(단, $0 \le \theta \le \pi$)라 할 때,

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = \underline{|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta}$$

이다. 따라서, 이는 두 변의 길이가 각각 $\underline{|\vec{a}|,\ |\vec{b}|}$이고 그 끼인각의 크기가 $\underline{\theta}$인 $\underline{\text{평행사변형}}$ 의 넓이와 같다.

정리	벡터의 외적의 방향 (오른손법칙)

영벡터가 아닌 두 공간벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 외적 $\vec{a}\times\vec{b}$의 방향은 벡터 $\vec{a}$에서 벡터 $\vec{b}$의 방향으로 오른나사를 돌렸을 때 나사가 진행하는 방향이다.



(증명) 이유: $\vec{e_1}\times\vec{e_2}=\vec{e_3}$