2026. 1학기. 학교연합 공동교육과정 고급수학I	학교:
07. [행렬] 행렬의 뜻	이름:

학습목표: 행렬의 뜻을 알고 행렬의 덧셈, 뺄셈, 실수배, 곱셈을 할 수 있다.

앞서, 여러 숫자를 한 줄에 담은 벡터에 대해 배웠다. 이번에는 여러 숫자를 한 줄이 아니라 하나의 직사각형에 담아볼 것이다.

정의	행렬의 뜻

________이란, 수 또는 변수 등 일련의 개체들을 행과 열에 맞추어 직사각형 모양으로 순서 있게 나열한 것으로 2차원 구조를 갖는다. 이 때 행렬을 이루는 수 등의 개체를 그 행렬의 _______이라고 하고 행렬에서 가로로 배열한 줄을 ____, 세로로 배열한 줄을 ____이라 한다.

$$
\begin{array}{cc}
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \text{제1행} \\ \leftarrow \text{제2행} \\ \\ \leftarrow \text{제}m\text{행} \end{array} \\
\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{제1열} & \text{제2열} & \text{제}n\text{열} \end{array} &
\end{array}
$$

이와 같이 총 m개의 행, n개의 열로 이루어진 행렬의 크기를 ____________이라고 하며 그러한 행렬을 ___________이라고 한다.

일반적으로 행렬은 대문자 $A, B, C, \cdots$를 사용하여 나타내고, 그 성분은 소문자 $a, b, c, \cdots$를 사용하여 나타낸다.

특히, 행렬 A의 i행 j열에 있는 성분을 행렬 A의 (i, j)성분이라고 하며 기호로 _____라고 한다. 그러한 의미에서 행렬 A를 ______________으로 나타내기도 한다.

자주 쓰이는 조금 더 특수한 행렬들을 정의해 보자.

정의	정사각행렬, 대각성분, 대각행렬, 단위행렬, 전치행렬

행렬 $A = (a_{ij})_{m \times n}$에 대해 다음과 같이 정의한다.

① 행렬 A의 ______성분: ____________________

② A는 ______________ $\Leftrightarrow$ ____
　ㄴ 예)

③ A는 ______________ $\Leftrightarrow$ ____
　ㄴ 예)

④ I는 ______________ $\Leftrightarrow$ ____
　ㄴ 예)

⑤ 행렬 A의 _____행렬 _____: A의 행과 열을 바꿔서 얻은 $n \times m$ 행렬.
　ㄴ 예)

문제	

주어진 행렬에 대해 물음에 답하시오.

$$A=\begin{pmatrix}1&3\\2&5\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&4\\6&2\\3&5\end{pmatrix}$$

(1) 행렬 A의 크기

(2) 행렬 B의 크기

(3) 성분 a_{12}

(4) 성분 b_{32}

(5) 행렬 A의 대각성분

(6) B^T

벡터와 마찬가지로 행렬 역시 서로 같은 행렬을 정의할 수 있다.

정의	서로 같은 행렬

행렬 $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})$에 대해 다음과 같이 정의한다.

$A=B$ (A,B는 서로 같은 행렬) $\Leftrightarrow$ ① ______________

② 모든 i,j에 대해, ______________

문제	

2×2행렬 A의 성분 a_{ij}가 $a_{ij}=i+j+1$을 만족하고, 행렬 $B=\begin{pmatrix}x&x+1\\y&y+1\end{pmatrix}$에 대하여 $A=B$를 만족할 때, x,y의 값을 정하여라

정의	대칭행렬

행렬 $A=(a_{ij})_{m\times n}$에 대해 다음과 같이 정의한다.

A는 ______행렬 $\Leftrightarrow$ ________

ㄴ예)

행의 개수와 열의 개수가 각각 같은 두 행렬은 서로 덧셈, 뺄셈 등의 연산을 수행할 수 있다. 그리고 임의의 행렬은 아래와 같이 실수와 곱할 수 있다.

정의	행렬의 덧셈, 뺄셈, 실수배
두 $m\times n$ 행렬 $A=(a_{ij})_{mn}$, $B=(b_{ij})_{mn}$, 임의의 실수 k에 대해, 다음이 성립한다. 1) $A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{mn}$ 2) $A-B=(a_{ij}-b_{ij})_{mn}$ 3) $kA=(ka_{ij})_{mn}$	

문제	
주어진 두 행렬에 대해 다음을 구하시오. $A=\begin{pmatrix}4&5&8\\5&3&6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&7&1\\5&6&2\end{pmatrix}$ (1) $A+B$ (2) $B-A$ (3) $3A$	

실수에 0이, 벡터에도 영벡터 $\vec{0}$이 존재하듯이, 행렬에도 비슷한 역할을 하는 행렬이 존재한다.

정의	영행렬
모든 성분이 ____인 행렬을 ______이라고 하고 기호로 O로 나타낸다.	

행렬의 덧셈, 실수배에 대하여 아래와 같이 여러 법칙이 성립한다.

정리	행렬의 덧셈, 실수배에 관한 성질
행렬 A, B, C의 크기가 모두 같을 때 다음이 성립한다. (단, k, l는 실수) ① (덧셈에 관한 교환법칙) $A+B=$ __________ ② (덧셈에 관한 결합법칙) ________________ = ________________ ③ (덧셈에 관한 분배법칙) $k(A+B)=$ ____________________ ④ (실수배에 관한 분배법칙) $k(lA)=$ ______	

읽을거리	행렬 연산을 이용한 이미지 처리

아래는 행렬의 덧셈을 이용한 이미지 밝기 처리 과정의 프로그래밍 코드 일부이다.

```
import cv2
import numpy as np

# 이미지를 불러오기.
image = cv2.imread('your_image.jpg') # 'your_image.jpg'를 실제 파일 경로로 변경

if image is None:
    print("이미지를 불러올 수 없습니다.")
else:
    brightness_value = 50 # 밝기 조절 값 (양수: 밝게, 음수: 어둡게)
    adjusted_image = cv2.add(image, np.ones_like(image) * brightness_value)

    cv2.imshow('Adjusted Image', adjusted_image)
    cv2.waitKey(0)
    cv2.destroyAllWindows()
```

cv2.imread(): 이미지 파일을 메모리로 불러온다.

cv2.add(): 원본 이미지 행렬에 brightness_value로 채워진 동일 크기의 **행렬을 더하여** 밝기를 조절. cv2.add()는 픽셀 값의 0-255 범위 유지를 자동으로 처리합니다.

cv2.imshow(), cv2.waitKey(), cv2.destroyAllWindows(): 조절된 이미지를 화면에 표시하고, 키 입력 대기 후 모든 창을 닫습니다.

행렬의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 배웠으니 이제 행렬의 곱셈을 배울 차례이다.

정의	행렬의 곱셈

행렬 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})$____ 에 대해 행렬의 곱 $C=AB$를 다음과 같이 정의한다.

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots a_{in}b_{nj}$$

└예: $XY=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$

└ A의 크기: $m\times n$, B의 크기: $n\times r$ $\Rightarrow$ 행렬 AB의 크기 : ________

문제	

다음을 계산하여라

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

정의	행렬의 n제곱

정사각행렬 $A=(a_{ij})_{n\times n}$에 대해 A를 n번 곱한 것을 A의 n제곱이라고 하고 아래와 같이 쓴다.

$$A^2 = A\times A,\ A^3 = A^2\times A,\ \cdots$$

문제	

행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$에 대하여 $AB=BA$가 성립하는지 조사하여라.

행렬의 곱셈은 아래와 같이 덧셈과 마찬가지로 결합법칙, 분배법칙이 성립하지만 교환법칙이 성립하지 않는다.

정의	행렬의 곱셈의 성질

A, B, C는 다음 연산이 가능한 행렬이고 k가 실수이면 다음이 성립한다.

① (곱셈에 관한 결합법칙) $A(BC)=$ ____________ ($=$__________)

② (곱셈에 관한 분배법칙) $A(B+C)=$ ______________, $(A+B)C=$ _____________

③ $k(AB)=$ ________$=$____________

2026. 1학기. 학교연합 공동교육과정 고급수학I	학교:
08. [행렬] 행렬식	이름:

학습목표: 행렬의 행렬식을 계산하고 활용할 수 있다.

정의	이차 정사각행렬의 행렬식

이차 정사각행렬 A에 대하여, 다음을 A의__________이라고 하고 이를 ________또는 _____라 나타낸다.

$$\det A = \underline{\hspace{8cm}}$$

문제	

다음 이차 정사각행렬의 행렬식을 구하여라.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$　　　(2) $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

문제	

벡터 $\vec{v} = (1,2)$, $\vec{u} = (2,3)$, 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) 좌표평면에서 두 벡터 $\vec{v}, \vec{u}$가 이루는 평행사변형의 넓이

(2) $|\det A|$

※ 이차정사각행렬 A에서, 벡터 $\vec{u} = (a_{11}, a_{21})$, $\vec{v} = (a_{21}, a_{22})$가 이루는 평행사변형의 넓이와 행렬식의 절댓값 $|detA|$은 일치한다. 이에 관련된 기하적 성질은 추후 선형변환 단원에서 배운다.

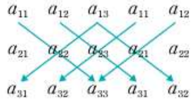
삼차 정사각행렬 또한 행렬식을 정의할 수 있다.

정의	삼차 정사각행렬의 행렬식

삼차 정사각행렬 A의 행렬식은 다음과 같다.

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \underline{\hspace{10cm}}$$

$$= \underline{\hspace{14cm}}$$



문제	
다음 삼차 정사각행렬의 행렬식을 구하여라. $$A=\begin{pmatrix}5 & -2 & 1\\3 & 4 & 0\\2 & -1 & 3\end{pmatrix}$$	

정리	행렬식의 성질
① 어느 한 행에 상수 k를 곱하여 얻은 행렬의 행렬식은 원래 행렬의 행렬식의 k배이다. ㄴ예) $A=\begin{pmatrix}1&4&3\\1&3&1\\2&3&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&4&3\\ & & \\2&3&5\end{pmatrix}$ 이면, $\det B=\qquad \det A$ ② 행렬 A의 어느 두 행의 위치를 바꾸어 얻은 행렬을 B라 하면, $\det B=$ ___________ ③ $\det(AB)=$ ______________ ④ $\det(A^{T})=$ ____________	

※일반적으로 $\det(A+B)$, $\det A+\det B$는 같지 않다.

2026. 1학기. 학교연합 공동교육과정 고급수학I	학교:
09. [행렬] 연립일차방정식과 행렬	이름:

학습목표: 가우스 소거법을 이용하여 연립일차방정식을 풀 수 있다.

정의	기약 행사다리꼴 행렬

다음 조건을 모두 만족하는 행렬을 ______________________이라 한다.
① 영이 아닌 원소를 갖는 행에서 처음 나오는 영이 아닌 수는 ___이어야 한다.
(이 수를 선도1(leading 1)이라 부른다.)
② 모든 원소가 영인 행이 있다면 그 행은 행렬의 맨 밑에 위치해야 한다.
③ 영이 아닌 원소를 갖는 연속된 두 행은 아래 행의 선도1이 위 행의 선도1보다 _____에 위치.
④ 선도1이 있는 열의 나머지 원소는 모두 ____이어야 한다.

문제	

다음 중 기약 행사다리꼴인 것을 모두 고르시오.

ㄱ. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ㄴ. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ ㄷ. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

ㄹ. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ㅁ. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ㅂ. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

문제	

다음 연립방정식을 푸시오. (단, x는 실수)

(1) $\begin{cases} 2x+y-z=3 \\ x+y+2z=2 \\ -x+2y-z=1 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+y-z=2 \\ x+y-z=0 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+2z=2 \\ 3x+3y+3z=3 \end{cases}$

연립일차방정식의 해에 관해 다음과 같은 성질이 성립한다.

정리	연립일차방정식의 해의 종류

연립일차방정식은 다음 중 하나를 만족한다.
1) 해가 ______.
2) 오직 ______의 해를 갖는다.
3) ____________해를 갖는다.

여기서는 연립방정식을 행렬로 나타내고, 행렬 연산을 통해 연립방정식을 푸는 법을 알아보자.

정의	계수행렬

3개의 미지수 x,y,z로 나타낸 연립일차방정식

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$ 을 행렬로 나타내면

즉, $AX = B$이다.

이 때, 행렬 A를 주어진 연립방정식의 ____________이라 한다.

정리	기본 행 연산, 가우스 소거법

행렬에는 다음과 같은 기본 행 연산을 행할 수 있다.

① $R_{i\leftrightarrow j}$: i행, j행을 서로 교환한다.

② $R_{ij}(k)$ i행을 k배 하여 j행에 더한다.

③ $R_i(k)$: i행을 k배 한다. ($k \neq 0$)

기본 행 연산을 통해 계수행렬을 기약행사다리꼴 행렬로 만들어 연립방정식을 푸는 방법을 ________________이라 한다.

예제	

다음은 아래 연립방정식을 가감법, 대입법을 이용하여 푸는 방법을 기본 행 연산을 적용하여 푸는 방식으로 바꾸시오.

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - 3y = -5 \end{cases}$$

가감법, 대입법	기본 행 연산( )

문제	

주어진 연립방정식을 가우스 소거법을 이용해 푸시오. (단, 계수행렬을 기약 행사다리꼴 행렬로 만드시오.)

(1) $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ -x + 2y + 2z = 5 \\ x - y + 2z = 4 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2y - 8z = 8 \\ -4x + 5y + 9z = -9 \end{cases}$　　(3) $\begin{cases} x + 4y - 3z = 7 \\ x + 5y + 3z = 9 \\ 2x + 8y - 4z = 24 \end{cases}$

문제	

주어진 연립방정식을 가우스 소거법을 이용해 푸시오. (단, 계수행렬을 기약 행사다리꼴 행렬로 만드시오.)

(4) $\begin{cases} 2y+3z=8 \\ 2x+3y+z=5 \\ x-y-2z=-5 \end{cases}$ (5) $\begin{cases} x-y-z=2 \\ 3x-3y+2z=16 \\ 2x-y+z=9 \end{cases}$ (6)

정의	기본행렬
단위행렬에 한 번의 기본 행 연산을 적용하여 얻을 수 있는 행렬을 이라 한다. 기본 행 연산에도 세 가지 형태가 있었듯, 기본행렬에도 이에 대응하는 세 가지 형태가 있다.	

문제	
다음 행렬이 기본행렬임을 설명하여라. (1) $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $E=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	

문제	
행렬을 이용하여 두 평면 $x+2y-z=3$과 $2x+3y+z=1$의 교선을 구하여라.	

2026. 1학기. 학교연합 공동교육과정 고급수학I	학교:
10. [행렬] 역행렬	이름:

학습목표: 가우스 소거법을 이용하여 역행렬을 구할 수 있다.

잘 만들어진 연산 ※에는 항등원(모든 a에 대해, $a ※ 0 = a$을 만족하는 a)과 역원(모든 a에 대해, $a ※ (-a) = 0$을 만족하는 $-a$)이 존재한다. 행렬 곱셈의 경우, 단위행렬이 항등원 역할을 한다.

문제	
모든 행렬 A, 단위행렬 I에 대해 $AI = A$, $IA = A$임을 보이시오.	

행렬 곱셈의 경우 아래와 같이 역행렬이 역원의 역할을 한다.

정의	역행렬
A가 ____________일 때, 아래를 만족하는 행렬 _____을 A의 ________이라 한다. ____________________________ (단, I는 단위행렬)	

정사각행렬이라 해서 역행렬을 항상 갖는 것은 아니다. 예컨대, 영행렬 O는 역행렬을 갖지 않는다.

정리	
A, B가 모두 정사각행렬일 때, ____________이면, ① A, B는 모두 _________을 갖고 ② $A^{-1} =$ _______, $B^{-1} =$ ________이다.	

이차정사각행렬의 경우 공식을 통해 역행렬을 쉽게 구할 수 있다.

문제	이차정사각행렬의 역행렬
이차정사각행렬 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여 다음이 성립한다. ① ____________이면, A는 역행렬을 가지며, $A^{-1} =$ 　　　　　　이다. ② ____________이면, A는 역행렬을 갖지 않는다.	

(증명) $A^{-1}=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$라 두고, $AA^{-1}=I$ 즉, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$을 만족하는 x, y, z, w를 구하면 아래와 같다. $x=\dfrac{d}{ad-bc}$, $y=\dfrac{-b}{ad-bc}$, $z=$, $w=$. 이하 생략.

문제	
다음 이차정사각행렬의 역행렬을 구하시오. (1) $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ (2) $A=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	

삼차정사각행렬의 역행렬을 구해 보자. 먼저, 아래와 같이 가우스 소거법을 이용해 구할 수 있다.

예제	가우스 소거법 (정사각행렬의 역행렬 구하는 방법 1)
가우스 소거법을 이용하여 행렬 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}$의 역행렬을 구하여라.	

[1단계] A, I를 아래와 같이 나란히 배열한다.

[2단계] 여기에서, A 자리의 행렬이 ______________________이 될 때까지 기본행연산을 적용한다.

[3단계] 이렇게 얻어지는 행렬 $B=\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$이 A의 역행렬이다.

문제	
가우스 소거법을 이용하여 다음 행렬의 역행렬을 구하여라.	
(1) $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	(2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

이제 정사각행렬의 역행렬을 구하는 방법 중 조금 더 도구적인 방법, 즉 행렬식을 이용해 구하는 법을 알아보도록 하자. 이를 위하여 소행렬, 소행렬식, 여인수와 같은 개념을 먼저 알아야 한다.

정의	소행렬, 소행렬식, 여인수
정사각행렬 A에 대해 다음과 같이 정의한다. _____: A의 성분 a_{ij}의 _________: A에서 ___번째 행, ___번째 열을 제외하여 얻은 행렬 ㄴ예: $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$에서 소행렬 $A_{12}=\begin{pmatrix} & \end{pmatrix}$ 이 때, 소행렬 A_{ij}의 행렬식을 ___________이라고 하고 기호로 ________ 또는 ______라 쓴다. 또한, 수 _____________를 성분 a_{ij}의_______(cofactor)라 하고 기호로 _____라 쓴다.	

예제	소행렬, 소행렬식, 여인수 구하기
행렬 $A=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&3\\4&-3&8\end{pmatrix}$에 대해 물음에 답하시오. (1) A의 모든 소행렬을 3개만 나열하시오. (2) 소행렬식 $\lvert A_{13}\rvert$을 구하시오. (3) 여인수 C_{13}을 구하시오.	

정의	여인수 전개
n차 정사각행렬 A에 대해 다음 합을 A의________________(cofactor expansion)이라고 한다. 제 j열에 의한 여인수 전개 : ______________________________ 제 i행에 의한 여인수 전개 : ______________________________	

일반적으로, 어떤 행 또는 열을 선택하든 여인수 전개에 의해 계산된 수는 항상 같음이 알려져 있다.

정의	행렬식
n차 정사각행렬 A에 대해 다음을 행렬 A의 이라고 한다. $\det A = a_{1j}C_{1j}+a_{2j}C_{2j}+\cdots+a_{nj}C_{nj}$ (제 j열에 의한 여인수 전개) $\quad = a_{i1}C_{i1}+a_{i2}C_{i2}+\cdots a_{in}C_{in}$(제 i행에 의한 여인수 전개)	

예제	여인수 전개(정사각행렬의 역행렬 구하는 방법 2)

다음 행렬의 행렬식을 여인수 전개를 이용하여 구하시오.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

문제	

다음 행렬의 행렬식을 여인수 전개를 이용하여 구하시오.

(1) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(2) $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

정의	여인수 행렬, 수반행렬

n차 정사각행렬 A에 대해, 다음을 A의 ________________이라고 한다. (단, C_{ij}는 a_{ij}의 여인수)

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

그리고 여인수행렬의 전치행렬 C^T를 A의 ______________이라고 하고, _______라고 쓴다.

소행렬식 $|A_{ij}|$와 여인수 C_{ij}는 서로 같거나 부호가 반대이다.

부호 $(-1)^{i+j}$는 $+1$또는 -1로써 다음과 같이 바둑판 배열의 부호와 같다.

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

그러므로 C_{ij}를 계산하기 위해서 $(-1)^{i+j}$를 계산할 필요 없이, 소행렬식 $|A_{ij}|$을 계산한 후 부호를 바둑판 배열 순서대로 붙여주면 된다.

예제	여인수 행렬

다음 행렬의 수반행렬 $adjA$를 구하시오.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

정리	여인수 전개를 이용한 역행렬 구하기
$\det A \neq 0$인 정사각행렬 A에 대해 다음이 성립한다. $$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\ adjA$$	

(증명) $A \times adjA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$ 이므로,

$A \times adjA$의 $i \times j$성분은 다음과 같다.

$$a_{i\ } C_{\ j} + a_{i\ } C_{\ j} + \cdots + a_{i\ } C_{\ j} = \begin{cases} & (i = j) \\ & (i \neq j) \end{cases}$$

따라서, $A \times adjA = \begin{pmatrix} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \end{pmatrix}$ = $\det A \times$

양변의 왼쪽에 ________________를 곱하면,

____

문제	

다음 행렬의 역행렬을 여인수 전개를 이용하여 구하시오.

(1) $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　　　(2) $B=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

역행렬을 갖는 행렬에는 다음과 같은 성질이 성립한다.

정리	

역행렬을 갖는 행렬 A, B그리고 0이 아닌 상수 k에 대하여 다음이 성립한다.

① $(A^{-1})^{-1}=$　　　② $(kA)^{-1}=$

③$(AB)^{-1}=$　　　④ $(A^{T})^{-1}=$

⑤ $(A^{n})^{-1}=$　　(단, n는 자연수)

지금까지 역행렬을 구하는 법을 배웠다. 이를 09단원에서 배웠던 연립방정식과 연결지어 이해해 보자.

정리
n차 정사각행렬 A에 대하여 다음 명제들은 서로 필요충분조건이다. 1) A^{-1}가 존재한다 2) A의 기약행사다리꼴행렬이 단위행렬 I이다. 3) 모든 벡터 $\vec{b}$에 대하여, 방정식 $A\vec{x}=\vec{b}$가 유일한 해 ________________를 갖는다. 4) $\det A \neq 0$이다.

문제
다음 연립방정식을 푸시오. (14쪽 예제 결과를 적절히 이용) $\begin{cases} y+2z=4 \\ x+3z=3 \\ 4x-3y+8z=6 \end{cases}$