2026. 1학기. 학교연합 공동교육과정 고급수학I	학교:
07. [행렬] 행렬의 뜻	이름:

학습목표: 행렬의 뜻을 알고 행렬의 덧셈, 뺄셈, 실수배, 곱셈을 할 수 있다.

앞서, 여러 숫자를 한 줄에 담은 벡터에 대해 배웠다. 이번에는 여러 숫자를 한 줄이 아니라 하나의 직사각형에 담아볼 것이다.

정의	행렬의 뜻

<u>행렬</u>이란, 수 또는 변수 등 일련의 개체들을 행과 열에 맞추어 직사각형 모양으로 순서 있게 나열한 것으로 2차원 구조를 갖는다. 이 때 행렬을 이루는 수 등의 개체를 그 행렬의 <u>성분</u>이라고 하고 행렬에서 가로로 배열한 줄을 <u>행</u> (row), 세로로 배열한 줄을 <u>열</u> (column)이라 한다.

$$A = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \text{제1행} \\ \leftarrow \text{제2행} \\ \\ \leftarrow \text{제}m\text{행} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{제1열} & \text{제2열} & \text{제}n\text{열} \end{array} & \end{array}$$

이와 같이 총 m개의 행, n개의 열로 이루어진 행렬의 크기를 <u>$m \times n$</u> (m by n)이라고 하며 그러한 행렬을 <u>$m \times n$ 행렬</u> (m by n 행렬)이라고 한다.

일반적으로 행렬은 대문자 $A, B, C, \cdots$를 사용하여 나타내고, 그 성분은 소문자 $a, b, c, \cdots$를 사용하여 나타낸다.

특히, 행렬 A의 i행 j열에 있는 성분을 행렬 A의 (i, j)성분이라고 하며 기호로 <u>a_{ij}</u>라고 한다. 그러한 의미에서 행렬 A를 <u>$\{a_{ij}\}_{m \times n}$</u>으로 나타내기도 한다.

자주 쓰이는 조금 더 특수한 행렬들을 정의해 보자.

정의	정사각행렬, 대각성분, 대각행렬, 단위행렬, 전치행렬

행렬 $A = (a_{ij})_{m \times n}$에 대해 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$ 대각성분

① 행렬 A의 <u>대각</u>성분: <u>a_{ii} (예: $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \cdots$)</u>

② A는 <u>정사각행렬</u> $\Leftrightarrow$ <u>(행의 개수) = (열의 개수)</u>

ㄴ 예) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

③ A는 <u>대각행렬</u> $\Leftrightarrow$ <u>대각성분을 제외한 모든 성분이 0인 행렬</u>

ㄴ 예) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

④ I는 <u>단위행렬</u> $\Leftrightarrow$ <u>대각성분이 모두 1인 대각행렬</u> $a_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$

ㄴ 예) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

⑤ 행렬 A의 <u>전치</u>행렬 <u>A^T</u>: A의 행과 열을 바꿔서 얻은 $n \times m$ 행렬.

ㄴ 예) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

문제	

주어진 행렬에 대해 물음에 답하시오.

$$A=\begin{pmatrix}1&3\\2&5\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1&4\\6&2\\3&5\end{pmatrix}$$

(1) 행렬 A의 크기 2x2
(2) 행렬 B의 크기 3x2
(3) 성분 a_{12} 3
(4) 성분 b_{32} 5
(5) 행렬 A의 대각성분 1,5
(6) B^T $=\begin{pmatrix}1&6&3\\4&2&5\end{pmatrix}$

벡터와 마찬가지로 행렬 역시 서로 같은 행렬을 정의할 수 있다.

정의	서로 같은 행렬

행렬 $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})$에 대해 다음과 같이 정의한다.

$A=B$ (A, B는 서로 같은 행렬) $\Leftrightarrow$ ① (A크기)=(B크기)
② 모든 i, j에 대해, $a_{ij}=b_{ij}$

문제	

2×2행렬 A의 성분 a_{ij}가 $a_{ij}=i+j+1$을 만족하고, 행렬 $B=\begin{pmatrix}x&x+1\\y&y+1\end{pmatrix}$에 대하여 $A=B$를 만족할 때, x, y의 값을 정하여라

A=B이므로, $\begin{pmatrix}3&4\\4&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&x+1\\y&y+1\end{pmatrix}$. $\therefore x=3, y=4$

정의	대칭행렬

행렬 $A=(a_{ij})_{m\times n}$에 대해 다음과 같이 정의한다.

A는 대칭 행렬 $\Leftrightarrow$ $a_{ij}=a_{ji}$ (모든 i, j에 대해)

ㄴ예)

$A=\begin{pmatrix}1&2&4\\2&3&6\\4&6&5\end{pmatrix}$

행의 개수와 열의 개수가 각각 같은 두 행렬은 서로 덧셈, 뺄셈 등의 연산을 수행할 수 있다. 그리고 임의의 행렬은 아래와 같이 실수와 곱할 수 있다.

정의	행렬의 덧셈, 뺄셈, 실수배
두 $m \times n$ 행렬 $A=(a_{ij})_{mn}$, $B=(b_{ij})_{mn}$, 임의의 실수 k에 대해, 다음이 성립한다. 1) $A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{mn}$ 2) $A-B=(a_{ij}-b_{ij})_{mn}$ 3) $kA=(ka_{ij})_{mn}$	

문제	
주어진 두 행렬에 대해 다음을 구하시오. $A=\begin{pmatrix}4&5&8\\5&3&6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&7&1\\5&6&2\end{pmatrix}$ (1) $A+B$ (2) $B-A$ (3) $3A$	

실수에 0이, 벡터에도 영벡터 $\vec{0}$이 존재하듯이, 행렬에도 비슷한 역할을 하는 행렬이 존재한다.

정의	영행렬
모든 성분이 0 인 행렬을 영행렬이라고 하고 기호로 O로 나타낸다.	

행렬의 덧셈, 실수배에 대하여 아래와 같이 여러 법칙이 성립한다.

정리	행렬의 덧셈, 실수배에 관한 성질
행렬 A, B, C의 크기가 모두 같을 때 다음이 성립한다. (단, k, l는 실수) ① (덧셈에 관한 교환법칙) $A+B=$ B+A ② (덧셈에 관한 결합법칙) A+(B+C) = (A+B)+C ③ (덧셈에 관한 분배법칙) $k(A+B)=$ kA+kB ④ (실수배에 관한 분배법칙) $k(lA)=$ (kl)A	

읽을거리	행렬 연산을 이용한 이미지 처리

아래는 행렬의 덧셈을 이용한 이미지 밝기 처리 과정의 프로그래밍 코드 일부이다.

```
import cv2
import numpy as np

# 이미지를 불러오기.
image = cv2.imread('your_image.jpg') # 'your_image.jpg'를 실제 파일 경로로 변경

if image is None:
    print("이미지를 불러올 수 없습니다.")
else:
    brightness_value = 50 # 밝기 조절 값 (양수: 밝게, 음수: 어둡게)
    adjusted_image = cv2.add(image, np.ones_like(image) * brightness_value)

    cv2.imshow('Adjusted Image', adjusted_image)
    cv2.waitKey(0)
    cv2.destroyAllWindows()
```

cv2.imread(): 이미지 파일을 메모리로 불러온다.

cv2.add(): 원본 이미지 행렬에 brightness_value로 채워진 동일 크기의 **행렬을 더하여** 밝기를 조절. cv2.add()는 픽셀 값의 0-255 범위 유지를 자동으로 처리합니다.

cv2.imshow(), cv2.waitKey(), cv2.destroyAllWindows(): 조절된 이미지를 화면에 표시하고, 키 입력 대기 후 모든 창을 닫습니다.

행렬의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 배웠으니 이제 행렬의 곱셈을 배울 차례이다.

정의	행렬의 곱셈

행렬 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times r}$ 에 대해 행렬의 곱 $C=AB$를 다음과 같이 정의한다.

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots a_{in}b_{nj}$$

└예: $XY=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}$

└ A의 크기: $m\times n$, B의 크기: $n\times r$ $\Rightarrow$ 행렬 AB의 크기 : $m\times r$

중요

문제	

다음을 계산하여라

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 17 & 15 \\ -5 & -8 \end{pmatrix}$

정의	행렬의 n제곱

정사각행렬 $A = (a_{ij})_{n \times n}$에 대해 A를 n번 곱한 것을 A의 n제곱이라고 하고 아래와 같이 쓴다.

$$A^2 = A \times A,\ A^3 = A^2 \times A,\ \cdots$$

문제	

행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$에 대하여 $AB = BA$가 성립하는지 조사하여라.

성립x. 풀이 노트로.

행렬의 곱셈은 아래와 같이 덧셈과 마찬가지로 결합법칙, 분배법칙이 성립하지만 교환법칙이 성립하지 않는다.

정의	행렬의 곱셈의 성질

A, B, C는 다음 연산이 가능한 행렬이고 k가 실수이면 다음이 성립한다.

① (곱셈에 관한 결합법칙) $A(BC) =$ (AB)C (= ABC)

② (곱셈에 관한 분배법칙) $A(B+C) =$ AB+AC, $(A+B)C =$ AC+BC

③ $k(AB) =$ (kA)B $=$ kAB

2026. 1학기. 학교연합 공동교육과정 고급수학I	학교:
08. [행렬] 행렬식	이름:

학습목표: 행렬의 행렬식을 계산하고 활용할 수 있다.

정의	이차 정사각행렬의 행렬식

이차 정사각행렬 A에 대하여, 다음을 A의 __행렬식__이라고 하고 이를 __det A__ 또는 __|A|__ 라 나타낸다.

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

($A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 일 때, $\det A = ad - bc$)

문제	

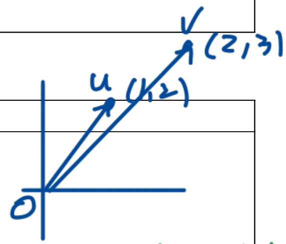
다음 이차 정사각행렬의 행렬식을 구하여라.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\det A = 1\times4 - 2\times3 = -2$

(2) $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ $\det B = 15 - 2 = 13$

문제	

NOTE $A = (\vec{v}\ \ \vec{u})$



벡터 $\vec{v} = (1,2)$, $\vec{u} = (2,3)$, 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) 좌표평면에서 두 벡터 $\vec{v}, \vec{u}$가 이루는 평행사변형의 넓이

(2) $|\det A|$

두 벡터 $\vec{u}, \vec{v}$를 이웃하는 변으로 갖는 평행사변형의 넓이는 행렬 $(\vec{u}\ \vec{v})$의 행렬식 절댓값과 같다.

※ 이차정사각행렬 A에서, 벡터 $\vec{u} = (a_{11}, a_{21})$, $\vec{v} = (a_{21}, a_{22})$가 이루는 평행사변형의 넓이와 행렬식의 절댓값 $|det A|$은 일치한다. 이에 관련된 기하적 성질은 추후 선형변환 단원에서 배운다.

(1) 교각 $\theta \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \dfrac{2+6}{\sqrt{5}\sqrt{13}} = \dfrac{8}{\sqrt{65}}$ $\therefore \sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \dfrac{1}{\sqrt{65}}$

$\therefore \triangle OUV = \dfrac{1}{2}|\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta = \dfrac{1}{2}\times\sqrt{65}\times\dfrac{1}{\sqrt{65}} = \dfrac{1}{2}$ $\therefore$ (평행사변형 넓이) $= 1$

(2) $|\det A| = |1\times3 - 2\times2| = |-1| = 1$

삼차 정사각행렬 또한 행렬식을 정의할 수 있다.

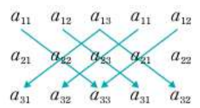
행렬식(O)
행렬식의 절댓값(X)

정의	삼차 정사각행렬의 행렬식

삼차 정사각행렬 A의 행렬식은 다음과 같다.

$$\det A = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$



문제	
다음 삼차 정사각행렬의 행렬식을 구하여라. $A=\begin{pmatrix}5&-2&1\\3&4&0\\2&-1&3\end{pmatrix}$	

$\det A = 5\times\begin{vmatrix}4&0\\-1&3\end{vmatrix}-(-2)\begin{vmatrix}3&0\\2&3\end{vmatrix}+1\times\begin{vmatrix}3&4\\2&-1\end{vmatrix}$

$=5(4\times3-0)+2(3\times3-0)+(-3-2\times4)$

$=60+18-11=67$

정리	행렬식의 성질
① 어느 한 행에 상수 k를 곱하여 얻은 행렬의 행렬식은 원래 행렬의 행렬식의 k배이다. ㄴ예) $A=\begin{pmatrix}1&4&3\\1&3&1\\2&3&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&4&3\\5&15&5\\2&3&5\end{pmatrix}$ 이면, $\det B=$ 5 $\det A$ $\times 5$ ② 행렬 A의 어느 두 행의 위치를 바꾸어 얻은 행렬을 B라 하면, $\det B=$ $-\det A$ ③ $\det(AB)=$ $(\det A)(\det B)$ ④ $\det(A^T)=$ $\det A$	

※일반적으로 $\det(A+B)$, $\det A+\det B$는 같지 않다.

2026. 1학기. 학교연합 공동교육과정 고급수학I	학교:
09. [행렬] 연립일차방정식과 행렬	이름:

학습목표: 가우스 소거법을 이용하여 연립일차방정식을 풀 수 있다.

정의	기약 행사다리꼴 행렬

다음 조건을 모두 만족하는 행렬을 __기약행사다리꼴행렬__이라 한다.

① 영이 아닌 원소를 갖는 행에서 처음 나오는 영이 아닌 수는 __1__이어야 한다.
(이 수를 선도1(leading 1)이라 부른다.)

② 모든 원소가 영인 행이 있다면 그 행은 행렬의 맨 밑에 위치해야 한다.

③ 영이 아닌 원소를 갖는 연속된 두 행은 아래 행의 선도1이 위 행의 선도1보다 __오른쪽__에 위치.

④ 선도1이 있는 열의 나머지 원소는 모두 __0__이어야 한다.

문제	

다음 중 기약 행사다리꼴인 것을 모두 고르시오.

X ㄱ. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 제3행의 선도1이 제2행의 선도1보다 왼쪽에 위치

X ㄴ. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ 제3행에서 0이 아닌 원소 중 처음나온 수가 1이 아님.

ㄷ. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

X ㄹ. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ㄴ와 동일

ㅁ. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

ㅂ. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

문제	

다음 연립방정식을 푸시오. (단, x는 실수)

(1) $\begin{cases} 2x + y - z = 3 & \text{①} \\ x + y + 2z = 2 & \text{②} \\ -x + 2y - z = 1 & \text{③} \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + y - z = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \\ 3x + 3y + 3z = 3 \end{cases}$

①, ② 연립 ⇒ $x - 3z = 1$
②, ③ 연립 ⇒ $3y + z = 3$) 연립
⇒ $x=1, z=0$
⇒ $x=1, y=1, z=0$

해가 없다

모든 실수

연립일차방정식의 해에 관해 다음과 같은 성질이 성립한다.

정리	연립일차방정식의 해의 종류

연립일차방정식은 다음 중 하나를 만족한다.

1) 해가 __없다__.
2) 오직 __하나__의 해를 갖는다.
3) __무수히 많은__ 해를 갖는다.

여기서는 연립방정식을 행렬로 나타내고, 행렬 연산을 통해 연립방정식을 푸는 법을 알아보자.

정의	계수행렬

3개의 미지수 x, y, z로 나타낸 연립일차방정식

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$ 을 행렬로 나타내면

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}}_{B}$$

즉, $AX = B$이다.

이 때, 행렬 A를 주어진 연립방정식의 __계수행렬__이라 한다.

정리	기본 행 연산, 가우스 소거법

행렬에는 다음과 같은 기본 행 연산을 행할 수 있다.

① $R_{i \leftrightarrow j}$: i행, j행을 서로 교환한다.

② $R_{ij}(k)$ i행을 k배 하여 j행에 더한다.

③ $R_i(k)$: i행을 k배 한다. ($k \neq 0$)

기본 행 연산을 통해 계수행렬을 기약행사다리꼴 행렬로 만들어 연립방정식을 푸는 방법을 __가우스 소거법__이라 한다.

예제	

다음은 아래 연립방정식을 가감법, 대입법을 이용하여 푸는 방법을 기본 행 연산을 적용하여 푸는 방식으로 바꾸시오.

$$\begin{cases} 2x + y = 4 & \text{———①} \\ x - 3y = -5 & \text{———②} \end{cases}$$

가감법, 대입법	기본 행 연산(가우스 소거법)
①에서, $y = -2x+4$ 이므로, 이를 ②에 대입, $x - 3(-2x+4) = -5$ $\therefore 7x = 7$ $\therefore x = 1.$ 이를 ①에 대입하면, $y = 2$ $\therefore \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ 1단계. 행사다리꼴행렬 만들기 2단계. 기약행사다리꼴 만들기 $\left(\begin{array}{cc\|c} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & -5 \end{array}\right) \underset{R_2(2)}{\sim} \left(\begin{array}{cc\|c} 2 & 1 & 4 \\ 2 & -6 & -10 \end{array}\right) \underset{R_{12}(-1)}{\sim} \left(\begin{array}{cc\|c} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -7 & -14 \end{array}\right)$ 행사다리꼴 $\underset{R_2(\frac{1}{7})}{\sim} \left(\begin{array}{cc\|c} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \underset{R_{21}(1),\ R_2(-1)}{\sim} \left(\begin{array}{cc\|c} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \underset{R_1(\frac{1}{2})}{\sim} \left(\begin{array}{cc\|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$ 기약행사다리꼴 $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \times x + 0 \times y = 1 \\ 0 \times x + 1 \times y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

문제
주어진 연립방정식을 가우스 소거법을 이용해 푸시오. (단, 계수행렬을 기약 행사다리꼴 행렬로 만드시오.)

(1) $\begin{cases} x-2y+z=1 \\ -x+2y+2z=5 \\ x-y+2z=4 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 2y-8z=8 \\ -4x+5y+9z=-9 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x+4y-3z=7 \\ x+5y+3z=9 \\ 2x+8y-4z=24 \end{cases}$

(1)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{R_{12}(1) \\ R_{13}(-1)}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{R_{2\leftrightarrow 3} \\ R_3(\frac{1}{3})}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

↳ 행사다리꼴행렬 완성

$$\underset{\substack{R_{31}(-1) \\ R_{32}(-1)}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\underset{R_{21}(2)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

↳ 기약행사다리꼴행렬 완성

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases}$$

(2)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{R_{13}(4) \\ R_2(\frac{1}{2})}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{array}\right)$$

$$\underset{R_{23}(3)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

↳ 행사다리꼴행렬 완성

$$\underset{R_{32}(4)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{R_{21}(2) \\ R_{31}(-1)}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

↳ 기약행사다리꼴행렬 완성

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x=29 \\ y=16 \\ z=13 \end{cases}$$

(3)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 7 \\ 1 & 5 & 3 & 9 \\ 2 & 8 & -4 & 24 \end{array}\right)$$

$$\underset{R_3(\frac{1}{2})}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 7 \\ 1 & 5 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & -2 & 12 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{R_{13}(-1) \\ R_{12}(-1)}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

↳ 행사다리꼴행렬 완성

$$\underset{R_{32}(-6)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -28 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

$$\underset{R_{21}(-4)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 119 \\ 0 & 1 & 0 & -28 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

$$\underset{R_{31}(3)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 134 \\ 0 & 1 & 0 & -28 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

↳ 기약행사다리꼴행렬

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x=134 \\ y=-28 \\ z=5 \end{cases}$$

문제	

주어진 연립방정식을 가우스 소거법을 이용해 푸시오. (단, 계수행렬을 기약 행사다리꼴 행렬로 만드시오.)

(4) $\begin{cases} 2y+3z=8 \\ 2x+3y+z=5 \\ x-y-2z=-5 \end{cases}$ (5) $\begin{cases} x-y-z=2 \\ 3x-3y+2z=16 \\ 2x-y+z=9 \end{cases}$ (6)

답) (4) $x=0, y=1, z=2$

(5) $x=3, y=-1, z=2$

정의	기본행렬
단위행렬에 한 번의 기본 행 연산을 적용하여 얻을 수 있는 행렬을 기본행렬 이라 한다. 기본 행 연산에도 세 가지 형태가 있었듯, 기본행렬에도 이에 대응하는 세 가지 형태가 있다.	

문제	
다음 행렬이 기본행렬임을 설명하여라. (1) $E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ (2) $E=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$	

I의 제2행을 -2배

I의 제2행을 2배하여 1행에 더한것

문제	
행렬을 이용하여 두 평면 $x+2y-z=3$과 $2x+3y+z=1$의 교선을 구하여라.	

교선 위의 점 (x,y,z)는 연립방정식

$$\begin{cases} x+2y-z=3 \\ 2x+3y+z=1 \end{cases}$$

의 해이다.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -9 & 15 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 0 & 10 & -14 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \end{array}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x+5z=-7 \\ y-3z=5 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=-5t-7 \\ y=3t+5 \\ z=t \end{cases}$$

또는

$$\frac{x+7}{-5}=\frac{y-5}{3}=z$$

2026. 1학기. 학교연합 공동교육과정 고급수학I	학교:
10. [행렬] 역행렬	이름:

학습목표: 가우스 소거법을 이용하여 역행렬을 구할 수 있다.

잘 만들어진 연산 ※에는 항등원(모든 a에 대해, $a※0=a$을 만족하는 a)과 역원(모든 a에 대해, $a※(-a)=0$을 만족하는 $-a$)이 존재한다. 행렬 곱셈의 경우, 단위행렬이 항등원 역할을 한다.

문제	
모든 행렬 A, 단위행렬 I에 대해 $AI=A$, $IA=A$임을 보이시오.	

생략.

행렬 곱셈의 경우 아래와 같이 역행렬이 역원의 역할을 한다.

정의	역행렬
A가 정사각행렬일 때, 아래를 만족하는 행렬 A^{-1}을 A의 역행렬이라 한다. $AA^{-1}=A^{-1}A=I$ (단, I는 단위행렬)	

정사각행렬이라 해서 역행렬을 항상 갖는 것은 아니다. 예컨대, 영행렬 O는 역행렬을 갖지 않는다.

정리	
A, B가 모두 정사각행렬일 때, $AB=I$이면, ① A, B는 모두 역행렬을 갖고 ② $A^{-1}=B$, $B^{-1}=A$이다.	

이차정사각행렬의 경우 공식을 통해 역행렬을 쉽게 구할 수 있다.

문제	이차정사각행렬의 역행렬
이차정사각행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여 다음이 성립한다. ① $\det A \neq 0$이면, A는 역행렬을 가지며, $A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ 이다. ② $\det A = 0$이면, A는 역행렬을 갖지 않는다. (즉 $ad-bc=0$)	

(증명) $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$라 두고, $AA^{-1} = I$ 즉, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$을 만족하는 x, y, z, w를 구하면 아래와 같다. $x = \dfrac{d}{ad-bc}$, $y = \dfrac{-b}{ad-bc}$, $z = \dfrac{-c}{ad-bc}$, $w = \dfrac{a}{ad-bc}$. 이하 생략.

문제	
다음 이차정사각행렬의 역행렬을 구하시오. (1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ (2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	

$A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$= \dfrac{1}{-1}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$\det A = ad - bc = 5 - 6 = -1$

A^{-1} 존재x

삼차정사각행렬의 역행렬을 구해 보자. 먼저, 아래와 같이 가우스 소거법을 이용해 구할 수 있다.

예제	가우스 소거법 (정사각행렬의 역행렬 구하는 방법 1)
가우스 소거법을 이용하여 행렬 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}$의 역행렬을 구하여라.	

[1단계] A, I를 아래와 같이 나란히 배열한다.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

[2단계] 여기에서, A 자리의 행렬이 기약행사다리꼴 행렬이 될 때까지 기본행연산을 적용한다.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & 6 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 12 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & 6 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 4 & -1 \\ 4 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 4 & -1 \\ 4 & 0 & 12 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 4 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -\frac{9}{2} & 6 & -\frac{3}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \underbrace{\begin{matrix} -\frac{9}{2} & 7 & -\frac{3}{2} \\ -2 & 4 & -1 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{matrix}}_{A^{-1}} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right)$$

[3단계] 이렇게 얻어지는 행렬 $B = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & 7 & -\frac{3}{2} \\ -2 & 4 & -1 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$이 A의 역행렬이다.

문제	

가우스 소거법을 이용하여 다음 행렬의 역행렬을 구하여라.

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

이제 정사각행렬의 역행렬을 구하는 방법 중 조금 더 도구적인 방법, 즉 행렬식을 이용해 구하는 법을 알아보도록 하자. 이를 위하여 소행렬, 소행렬식, 여인수와 같은 개념을 먼저 알아야 한다.

정의	소행렬, 소행렬식, 여인수

정사각행렬 A에 대해 다음과 같이 정의한다.

A_{ij} : A의 성분 a_{ij}의 소행렬 : A에서 i번째 행, j번째 열을 제외하여 얻은 행렬

ㄴ예: $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$에서 소행렬 $A_{12}=\begin{pmatrix}4&6\\7&9\end{pmatrix}$

이 때, 소행렬 A_{ij}의 행렬식을 소행렬식 이라고 하고 기호로 $\det A_{ij}$ 또는 $|A_{ij}|$ 라 쓴다.

절댓값 의미아님주의

또한, 수 $(-1)^{i+j}|A_{ij}|$를 성분 a_{ij}의 여인수 (cofactor)라 하고 기호로 C_{ij} 라 쓴다.

$C_{ij}=(-1)^{i+j}\det A_{ij}$

예제	소행렬, 소행렬식, 여인수 구하기

행렬 $A=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&3\\4&-3&8\end{pmatrix}$에 대해 물음에 답하시오.

(1) A의 모든 소행렬을 3개만 나열하시오. $A_{12}=\begin{pmatrix}1&3\\4&8\end{pmatrix}$, $A_{33}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

(2) 소행렬식 $|A_{13}|$을 구하시오. $\begin{vmatrix}1&0\\4&-3\end{vmatrix}=-3$

(3) 여인수 C_{13}을 구하시오.

$C=(-1)^{1+3}\det A_{13}=\begin{vmatrix}1&0\\4&-3\end{vmatrix}=-3$

$$\begin{array}{c} \text{j열} \\ \begin{pmatrix} \cdots & \begin{matrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{nj}\end{matrix} & \cdots \end{pmatrix}\end{array}$$

정의	여인수 전개

n차 정사각행렬 A에 대해 다음 합을 A의 여인수전개 (cofactor expansion)이라고 한다.

제 j열에 의한 여인수 전개 : $\sum_{k=1}^{n} a_{kj}C_{kj}=a_{1j}C_{1j}+a_{2j}C_{2j}+\cdots+a_{nj}C_{nj}$

제 i행에 의한 여인수 전개 : $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}C_{ik}=a_{i1}C_{i1}+a_{i2}C_{i2}+\cdots+a_{in}C_{in}$

일반적으로, 어떤 행 또는 열을 선택하든 여인수 전개에 의해 계산된 수는 항상 같음이 알려져 있다.

정의	행렬식

n차 정사각행렬 A에 대해 다음을 행렬 A의 행렬식 이라고 한다.

$\det A=a_{1j}C_{1j}+a_{2j}C_{2j}+\cdots+a_{nj}C_{nj}$ (제 j열에 의한 여인수 전개)

$\quad\;\, =a_{i1}C_{i1}+a_{i2}C_{i2}+\cdots a_{in}C_{in}$(제 i행에 의한 여인수 전개)

지금까지 다룬 행렬식은 2,3차 정사각행렬의 행렬식.

예제	여인수 전개(정사각행렬의 역행렬 구하는 방법 2)

다음 행렬의 행렬식을 여인수 전개를 이용하여 구하시오.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

제3행에 대해 여인수 전개하면,

$\det A = a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33}$

$= \underset{5}{\cancel{a_{31}}} \times \underbrace{(-1)^{3+1}}_{=1} \times \det A_{31} + \underset{4}{\cancel{a_{32}}} \times \underbrace{(-1)^{3+2}}_{=-1} \det A_{32} + \underset{-2}{\cancel{a_{33}}} \times \underbrace{(-1)^{3+3}}_{=1} \det A_{33}$

$= 5 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} - 4 \times \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}$

$= 5(3\times1-0) - 4(3\times3-0) - 2(-12+2) = -41$

문제	

다음 행렬의 행렬식을 여인수 전개를 이용하여 구하시오.

(1) $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 0이 가장 많은 제3행 기준으로 여인수 전개

(2) $B=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

(1) 제3행 여인수 전개하면,

$\det A = 0 \times C_{31} + 0 \times C_{32} + 2 \times C_{33}$

$= 2 \times C_{33}$

$= 2 \times (-1)^{3+3} \times \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}$

$= 2 \times (-12) = -24$

(2) 제3행 여인수 전개하면,

$\det B = 1 \times C_{31} + 0 \times C_{32} - 3 \times C_{33}$

$= C_{31} - 3C_{33}$

$= 1 \times (-1)^{3+1} \times \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} - 3 \times (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$

$= (-4-6) - 3(18+10)$

$= -10 - 84 = -94$

정의 | 여인수 행렬, 수반행렬

n차 정사각행렬 A에 대해, 다음을 A의 <u>여인수행렬</u>이라고 한다. (단, C_{ij}는 a_{ij}의 여인수)

$$C=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

그리고 여인수행렬의 전치행렬 C^T를 A의 <u>수반행렬</u>이라고 하고, <u>$adjA$</u>라고 쓴다.

소행렬식 $\cancel{|A_{ij}|}$ $detA_{ij}$와 여인수 C_{ij}는 서로 같거나 부호가 반대이다. $(\because\ C_{ij}=(-1)^{i+j}detA_{ij})$

부호 $(-1)^{i+j}$는 $+1$또는 -1로써 다음과 같이 바둑판 배열의 부호와 같다.

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

그러므로 C_{ij}를 계산하기 위해서 $(-1)^{i+j}$를 계산할 필요 없이, 소행렬식 $|A_{ij}|$을 계산한 후 부호를 바둑판 배열 순서대로 붙여주면 된다.

예제 | 여인수 행렬

다음 행렬의 수반행렬 $adjA$를 구하시오.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

여인수행렬 $C=\begin{pmatrix} +detA_{11} & -detA_{12} & +detA_{13} \\ -detA_{21} & +detA_{22} & -detA_{23} \\ +detA_{31} & -detA_{32} & +detA_{33} \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} +(0\times7-2\times5) & -(4\times7-0\times5) & +(4\times2-0) \\ -(3\times7-1\times2) & +(2\times7-0\times1) & -(2\times2-0\times3) \\ +(3\times5-0) & -(2\times5-4\times1) & +(2\times0-3\times4) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -10 & -28 & 8 \\ -19 & 14 & -4 \\ 15 & -6 & -12 \end{pmatrix}$

$\therefore$ 수반행렬 $adjA=C^T=\begin{pmatrix} -10 & -19 & 15 \\ -28 & 14 & -6 \\ 8 & -4 & -12 \end{pmatrix}$

정리	여인수 전개를 이용한 역행렬 구하기
$\det A \neq 0$인 정사각행렬 A에 대해 다음이 성립한다. $$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\ adj A$$	

(증명) $A \times adjA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$ 이므로,

$(a_{i1}\ a_{i2} \cdots a_{in})$

$\begin{pmatrix} C_{1j} \\ C_{2j} \\ \vdots \\ C_{nj} \end{pmatrix}$

$A \times adjA$의 $i \times j$성분은 다음과 같다.

$$a_{i1}C_{1j} + a_{i2}C_{2j} + \cdots + a_{in}C_{nj}$$

$$\cancel{a_iC_{i1} + a_iC_{i2} + \cdots + a_iC_{in}} = \begin{cases} \det A & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

따라서, $A \times adjA = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det A \end{pmatrix} = \det A \times I$

양변의 왼쪽에 $\frac{1}{\det A} \times A^{-1}$를 곱하면,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \times adjA.$$

문제
다음 행렬의 역행렬을 여인수 전개를 이용하여 구하시오. (1) $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{12} & -\frac{3}{8} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (2) $B=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

(1) Note. $A^{-1}=\frac{1}{\det A}\times \operatorname{adj} A$.

$\det A = -24$ (17쪽 풀이참고)

여인수행렬 $C=\{C_{ij}\}_{3\times3}$

$$=\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ -2 & 8 & 0 \\ 9 & -12 & -12 \end{pmatrix}$$

$\therefore \operatorname{adj} A = C^T = \begin{pmatrix} -6 & -2 & 9 \\ 0 & 8 & -12 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$

$\therefore A^{-1} = \frac{1}{-24}\begin{pmatrix} -6 & -2 & 9 \\ 0 & 8 & -12 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{12} & -\frac{3}{8} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(2) $\det B = -94$ ($\because$ 17쪽 풀이참고)

여인수행렬 $C=\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} -18 & 17 & -6 \\ -6 & -10 & -2 \\ -10 & -1 & 28 \end{pmatrix}$$

$\therefore A^{-1} = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj} A = \frac{1}{\det A}\times C^T$

$$=\frac{1}{-94}\begin{pmatrix} -18 & -6 & -10 \\ 17 & -10 & -1 \\ -6 & -2 & 28 \end{pmatrix}$$

역행렬을 갖는 행렬에는 다음과 같은 성질이 성립한다.

정리	
역행렬을 갖는 행렬 A, B그리고 0이 아닌 상수 k에 대하여 다음이 성립한다.	
① $(A^{-1})^{-1} = A$	② $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$
③$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$	④ $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
⑤ $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ (단, n는 자연수)	

지금까지 역행렬을 구하는 법을 배웠다. 이를 09단원에서 배웠던 연립방정식과 연결지어 이해해 보자.

<table>
<tr><td>종합 문제</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">다음 연립방정식에 대해 물음에 답하시오.

(1) 중학교 때 배웠던 대입법, 가감법을 이용해 연립방정식을 푸시오.
(2) 가우스 소거법을 이용해 연립방정식을 푸시오.
(3) 여인수 전개를 이용해 연립방정식을 푸시오.
(3) 미지수의 개수가 5개 이상이 되면 (1),(2),(3) 중 어떤 방법이 가장 편하겠는가, 그리고 불편하겠는가? 그 이유는 무엇이라고 생각하는가?
(4) 미지수의 개수가 5개 이상일 때, 알고리즘을 만든다면 (1),(2),(3) 중 어떤 방법이 가장 편하겠는가? 그 이유는 무엇이라고 생각하는가?</td></tr>
</table>