

예	고유치, 고유벡터 구하기
행렬 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 의	고유치, 고유벡터를 각각 구하여라.

(풀이) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 라 하자. 특성다항식의 근을 구하자.

i) $\lambda = 1$ 인 경우

ii) $\lambda = -1$ 인 경우

따라서, 행렬 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 의 고유치, 고유벡터는 아래와 같다.

① 고유치 $\lambda = 1$ 에 대응하는 고유벡터: _____

② 고유치 $\lambda = -1$ 에 대응하는 고유벡터: _____

문 제	
행렬 $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 의 고유치, 고유벡터를 각각 구하여라.	

2026. 1학기. 학교연합 공동교육과정 고급수학I	학교:
15. [행렬 대각화] 행렬의 대각화	이름:

정의	일차독립, 일차종속
① 벡터 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ 은 _____ $\Leftrightarrow$ _____인 실수 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 존재 (단, 이 a_k 중 적어도 하나는 0이 아니다.) ② 벡터 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ 은 _____ $\Leftrightarrow$ 벡터 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ 이 _____이 아니다.	

예	
$\vec{v}_1 = (2, 6), \vec{v}_2 = (1, 5), \vec{v}_3 = (3, 3)$ 은 일차종속임을 보이시오.	

벡터들이 일차독립 또는 일차종속임을 보이는 과정을 행렬을 이용하여 더 간단히 할 수 있다.

정리	
두 벡터 $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$에 대해, $\vec{a}, \vec{b}$는 일차독립 $\Leftrightarrow$ 행렬 $A = \begin{pmatrix} & \end{pmatrix}$에 대해 $\Leftrightarrow$ _____ 존재 $\Leftrightarrow$ 방정식 _____가 _____ 이외의 해를 갖지 않는다.	

(증명)

정의	대각화 가능
정사각행렬 A에 대해, A : _____ $\Leftrightarrow$ _____인 행렬 P, 대각행렬 D가 존재	

예	
예) 행렬 $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$를 써서 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$가 대각화 가능함을 보이시오.	

정리	
n차 정사각행렬 A에 대해, A : _____ $\Leftrightarrow n$개의 고유벡터 $\vec{p}_i$가 서로 _____ $\perp$이 때, 행렬 $P = (\vec{p}_1 \vec{p}_2 \cdots \vec{p}_n)$에 의해 A는 대각화가능하고, 대각행렬 $D =$ _____ 이다.	

(증명)

($\Leftarrow$) n 개의 고유벡터 $\vec{p}_i$ 가 서로 일차독립이라고 하고, $P = (\vec{p}_1 \vec{p}_2 \cdots \vec{p}_n)$ 라 하자.

λ_k 는 이에 대응하는 고유치라고 하자.

$$AP = A(\vec{p}_1 \vec{p}_2 \cdots \vec{p}_n) = (A\vec{p}_1 \ A\vec{p}_2 \ \cdots \ A\vec{p}_n) \text{ 이고,}$$

$$PD = (\vec{p}_1 \vec{p}_2 \cdots \vec{p}_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \text{_____} \text{ 이다.}$$

각 k 에 대해, $A\vec{p}_k = \lambda_k \vec{p}_k$ 이므로 _____ 이다.

즉, _____이므로, A 는 대각화가능하다.

문 제	
행렬이 대각화가능한지 판단하고, 대각화 가능하면 대각화하여라.	
(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$	(2) $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

면접대비	
1) 행렬이 대각화가능한지 판단하는 방법을 간략히 구두로 설명해보세요. 2) 행렬을 대각화하는 방법을 간략히 구두로 설명해보세요.	

행렬 대각화는 많은 어려운 문제를 간단히 해결하는 데 도움이 된다. 예를 들어, 행렬의 거듭제곱을 훨씬 편리하게 할 수 있다.

정리	
행렬 A 가 대각화가능 ($P^{-1}AP = D$)하면 아래가 성립한다. $A^n =$ _____ $=$ _____ (단, n :자연수)	

문제	
행렬 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 을 대각화하고, 이를 이용하여 A^n 을 구하여라.	

예(교육과정 외)	이차형식의 대각화
행렬 대각화를 이용하여, 타원방정식 $5x^2 + 4xy + 5y^2 = 9$ 의 xy 좌표계를 적절히 회전시켜 $aX^2 + bY^2 = 9$ 형태로 만드시오.	

(풀이)

주어진 타원방정식을 아래와 같이 행렬 곱셈 형식으로 바꾸자.

$$(x \ y) \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 9 \quad \dots (*)$$

↳ 행렬 A 라 하자.

A 의 특성다항식의 근을 구하자.

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} 5 - \lambda & 2 \\ 2 & 5 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 7$ 이고, (...중략...) 그에 따른 고유벡터는 각각 $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 이다.

각 고유벡터의 크기를 다음과 같이 1로 만들자.

$$p_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, p_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

그러면 $P = (p_1 \ p_2) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ 이고, $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ 이다.

따라서, $A = PDP^{-1}$ 이다. 이를 (*)에 대입하자.

$$(x \ y)PDP^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 9 \quad \dots (**)$$

$P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ 로 치환하자. 그러면, (**)는 아래와 같이 바뀐다. (어려움)

$$(X \ Y)D \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \text{ 즉, } (X \ Y) \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

정리하면, 주어진 타원은 $3X^2 + 7Y^2 = 9$ 로 쓸 수 있다.