

예	고유치, 고유벡터 구하기
행렬 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 의	고유치, 고유벡터를 각각 구하여라.

(풀이) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 라 하자. 특성다항식의 근을 구하자.

$$\underbrace{\det(\lambda I - A)}_{A \text{ 특성다항식}} = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} = \underbrace{\lambda^2 - 1}_{\lambda = \pm 1} = 0$$

i) $\lambda = 1$ 인 경우

$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ 인 $\vec{x}$ 찾다. $\Leftrightarrow (\lambda I - A)\vec{x} = \vec{0}$ 인 $\vec{x}$ 찾다. $\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ 라 두라.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a = b \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} a \quad (a: \text{실수})$$

ii) $\lambda = -1$ 인 경우

$(\lambda I - A)\vec{x} = \vec{0}$ 인 $\vec{x} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ 찾다.

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow d = -c \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} c \\ -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} c \quad (c: \text{실수})$$

따라서, 행렬 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 의 고유치, 고유벡터는 아래와 같다.

① 고유치 $\lambda = 1$ 에 대응하는 고유벡터: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} a \quad (a: \text{실수})$

② 고유치 $\lambda = -1$ 에 대응하는 고유벡터: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} c \quad (c: \text{실수})$

문제	
행렬 $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 의 고유치, 고유벡터를 각각 구하여라.	

특성방정식 $\det(\lambda I - A)$ 의 근: λ 를 구한다.

$$\det \begin{pmatrix} \lambda-3 & -1 \\ 0 & \lambda-1 \end{pmatrix} = \underbrace{(\lambda-3)(\lambda-1) - 0}_{\lambda=1 \text{ or } 3} = 0$$

i) $\lambda=1$ 인 경우,

$\lambda=1$ 에 대응하는 고유벡터 $\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ 를 구한다.

$$\begin{aligned} (\lambda I - A)\vec{x} &= \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} -2a - b &= 0 \\ \therefore b &= -2a \end{aligned} \\ \Rightarrow \vec{x} &= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -2a \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\lambda=1 \text{에 대응 고유벡터}} a \quad (a: \text{실수}) \end{aligned} \quad \text{--- ㉠$$

ii) $\lambda=3$ 인 경우

$\lambda=3$ 에 대응하는 고유벡터 $\vec{x} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ 를 구한다.

$$\begin{aligned} (\lambda I - A)\vec{x} &= \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -d \\ 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \therefore d=0 \\ \Rightarrow \vec{x} &= \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\lambda=3 \text{에 대응 고유벡터}} c \quad (c: \text{실수}) \end{aligned} \quad \text{--- ㉡$$

㉠, ㉡에 의해,

$$\text{행렬 } \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{의 고유치, 고유벡터: } \begin{cases} \lambda=1, \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} a \quad (a \in \mathbb{R}) \\ \lambda=3, \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} c \quad (c \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

2026. 1학기. 학교연합 공동교육과정 고급수학I	학교:
15. [행렬 대각화] 행렬의 대각화	이름:

정의	일차독립, 일차종속
① 벡터 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ 은 <u>일차종속</u> $\Leftrightarrow a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \dots + a_n\vec{v}_n = \vec{0}$ 인 실수 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 존재 (단, 이 a_k 중 적어도 하나는 0이 아니다.) ② 벡터 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ 은 <u>일차독립</u> $\Leftrightarrow$ 벡터 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ 이 <u>일차종속</u> 이 아니다.	

예	
$\vec{v}_1 = (2, 6), \vec{v}_2 = (1, 5), \vec{v}_3 = (3, 3)$ 은 일차종속임을 보이시오.	

$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3 = \vec{0}$ 인 실수 $a_k (k=1,2,3)$ 이 존재하지 않는다.

$$a_1(2, 6) + a_2(1, 5) + a_3(3, 3) = (0, 0)$$

$$\therefore (2a_1 + a_2 + 3a_3, 6a_1 + 5a_2 + 3a_3) = (0, 0)$$

$$\therefore \begin{cases} 6a_1 + 5a_2 + 3a_3 = 0 \\ 2a_1 + a_2 + 3a_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

let A.

$$A \sim \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1(-)} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2(-)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{12}(-)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \therefore \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} a_1 + 3a_3 = 0 \\ a_2 - 3a_3 = 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} a_1 = -3a_3 \\ a_2 = +3a_3 \end{cases} \therefore \text{①은 만족하는 모든 } (a_1, a_2, a_3) \text{이}$$

②를 만족하므로, $a_1 = -3, a_2 = 3, a_3 = 1$

에 의해 $a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3 = \vec{0}$,

$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \neq 0 \therefore$ 일차종속.

벡터들이 일차독립 또는 일차종속임을 보이는 과정을 행렬을 이용하여 더 간단히 할 수 있다.

정리	
두 벡터 $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$ 에 대해,	
$\vec{a}, \vec{b}$ 는 일차독립 $\Leftrightarrow$ 행렬 $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ 에 대해 $\det A \neq 0$	
$\Leftrightarrow A^{-1}$ 존재	
$\Leftrightarrow$ 방정식 $A\vec{x} = \vec{0}$ 가 $\vec{x} = \vec{0}$ 이외의 해를 갖지 않는다.	

(증명) (→) $\vec{a}, \vec{b}$ 가 일차독립이라 하자. 그러면, $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$ 이다.

$\vec{a} = (a_1, a_2)$ 의 두 성분 a_1, a_2 중 적어도 하나는 0이 아니다. $a_1 \neq 0$ 라 하자.

$k = -\frac{b_1}{a_1}$ 라 하자. 그러면, $b_1 = -ka_1$ 이다. ①

$\det A = 0$ 라 가정하면, $a_1 b_2 - b_1 a_2 = 0$ 이고 ①을 대입하면, $a_1(b_2 + ka_2) = 0$

$\therefore b_2 = -a_2 k$ — ② ①, ②에 의해,

$k\vec{a} + \vec{b} = (ka_1 + b_1, ka_2 + b_2) = \vec{0}$ 이므로 이는 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 일차독립이라는 데 모순.

$\therefore \det A \neq 0$ 이다.

(←) $\det A \neq 0$ 이라 하면, $a_1 b_2 - b_1 a_2 \neq 0$ 이다. $p\vec{a} + q\vec{b} = \vec{0}$ 이라 하자. ($p, q \in \mathbb{R}$)

$(0, 0) = p\vec{a} + q\vec{b} = p(a_1, a_2) + q(b_1, b_2) = (pa_1 + qb_1, pa_2 + qb_2)$

$\therefore pa_1 + qb_1 = 0$ (③) $pa_2 + qb_2 = 0$ (④)

③, ④를 연립하면, $p = 0, q = 0 \therefore \vec{a}, \vec{b}$ 는 일차독립이다.

정의	대각화 가능
정사각행렬 A에 대해, A : <u>대각화 가능</u> $\Leftrightarrow$ <u>$P^{-1}AP=D$</u> 인 행렬 P, 대각행렬 D가 존재	

예	
예) 행렬 $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$를 써서 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$가 대각화 가능함을 보이시오.	

$$P^{-1} = \frac{1}{-2-3} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} : \text{대각행렬}$$

이렇게 구함?
↓

정리	
n차 정사각행렬 A에 대해, A : <u>대각화 가능</u> $\Leftrightarrow$ n개의 고유벡터 $\vec{p}_i$가 서로 <u>일차독립</u> $\hookrightarrow$ 이 때, 행렬 $P = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2 \ \cdots \ \vec{p}_n)$에 의해 A는 대각화가능하고, ($P^{-1}AP=D$) 대각행렬 $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ 이다. (λ_i: 고유치)	

(증명)

($\Leftarrow$) n 개의 고유벡터 $\vec{p}_i$ 가 서로 일차독립이라고 하고, $P = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2 \ \cdots \ \vec{p}_n)$ 라 하자.

λ_k 는 이에 대응하는 고유치라고 하자.

$$AP = A(\vec{p}_1 \ \vec{p}_2 \ \cdots \ \vec{p}_n) = (A\vec{p}_1 \ A\vec{p}_2 \ \cdots \ A\vec{p}_n) \text{ 이고,}$$

$$PD = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2 \ \cdots \ \vec{p}_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = (\lambda_1 \vec{p}_1 \ \lambda_2 \vec{p}_2 \ \cdots \ \lambda_n \vec{p}_n) \text{ 이다.}$$

각 k 에 대해, $A\vec{p}_k = \lambda_k \vec{p}_k$ 이므로 $AP=PD$ 이다.

즉, $P^{-1}AP=D$ 이므로, A 는 대각화가능하다.

문제	
행렬이 대각화가능한지 판단하고, 대각화 가능하면 대각화하여라.	
(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$	(2) $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

1단계. 고유벡터 $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ 를 구하자.

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ -6 & \lambda + 1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1.$$

1) $\lambda = 1$

$$\Rightarrow (\lambda I - A)\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} x \quad (x \in \mathbb{R})$$

2) $\lambda = -1$

$$\Rightarrow (\lambda I - A)\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -2x \\ -6x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} y \quad (y \in \mathbb{R})$$

$$\therefore \vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} x \quad (x \in \mathbb{R}) \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} y \quad (y \in \mathbb{R})$$

2단계. $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ 가 선형독립인지 조사

$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 이 선형독립인지 조사해볼까?

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ 이라 하면, } a=0, b=0.$$

$\therefore$ 선형독립.

3단계. 대각화

$$P = (\vec{p}_1 \quad \vec{p}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ 이라 하자.}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

대각행렬.

$$\therefore A \text{는 } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{로 대각화됨.}$$

$$\det(\lambda I - B) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & 1 \\ -1 & \lambda - 4 \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda - 2)(\lambda - 4) + 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 9$$

$$= (\lambda - 3)^2$$

$\lambda = 3$ $\therefore$ 일차독립인 두 개의 고유벡터가 존재할 수 없으므로 대각화불가능.

면접대비	
1) 행렬이 대각화가능한지 판단하는 방법을 간략히 구두로 설명해보세요. 2) 행렬을 대각화하는 방법을 간략히 구두로 설명해보세요.	

행렬 대각화는 많은 어려운 문제를 간단히 해결하는 데 도움이 된다. 예를 들어, 행렬의 거듭제곱을 훨씬 편리하게 할 수 있다.

정리	$A = PDP^{-1}$
행렬 A 가 대각화가능 ($P^{-1}AP = D$)하면 아래가 성립한다. $A^n = \underbrace{(PDP^{-1}) \times (PDP^{-1}) \times \dots \times (PDP^{-1})}_n$ $= PD^nP^{-1}$ (단, n : 자연수) NOTE: D^n 는 A^n 에서 쉽게 찾을 수 있음.	

문제	
행렬 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 을 대각화하고, 이를 이용하여 A^5 을 구하여라.	

$$\det(\lambda I - A) = 0 \Rightarrow \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -2 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = \lambda(\lambda - 1) - 2 = 0$$

i) $\lambda = -1$ 인 경우

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

$$(\lambda I - A)\vec{x} = \vec{0}$$

$$(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0 \quad \therefore \lambda = -1 \text{ or } 2$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times (x \in \mathbb{R}) \quad \text{--- ㉑}$$

ii) $\lambda = 2$ 인 경우

$$(\lambda I - A)\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times (x \in \mathbb{R}) \quad \text{--- ㉒}$$

$$\text{㉑, ㉒에 의해, } P = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ or } P^{-1} = \frac{1}{2+1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = PDP^{-1} \quad \therefore A^n = PD^nP^{-1} \quad \therefore A^5 = PD^5P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 32 \end{pmatrix} \times \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 32 \\ 1 & 64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 30 & 33 \\ 66 & 63 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 22 & 21 \end{pmatrix}$$

예(교육과정 외)	이차형식의 대각화
행렬 대각화를 이용하여, 타원방정식 $5x^2 + 4xy + 5y^2 = 9$ 의 xy 좌표계를 적절히 회전시켜 $aX^2 + bY^2 = 9$ 형태로 만드시오.	

(풀이)

주어진 타원방정식을 아래와 같이 행렬 곱셈 형식으로 바꾸자.

$$(x \ y) \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 9 \quad \dots (*)$$

⌞행렬 A 라 하자.

A 의 특성다항식의 근을 구하자.

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} 5 - \lambda & 2 \\ 2 & 5 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 7$ 이고, ($\dots$ 중략 $\dots$) 그에 따른 고유벡터는 각각 $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 이다.

각 고유벡터의 크기를 다음과 같이 1로 만들자.

$$p_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, p_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

그러면 $P = (p_1 \ p_2) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ 이고, $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ 이다.

따라서, $A = PDP^{-1}$ 이다. 이를 (*)에 대입하자.

$$(x \ y)PDP^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 9 \quad \dots (**)$$

$P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ 로 치환하자. 그러면, (**)는 아래와 같이 바뀐다. (어려움)

$$(X \ Y)D \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \text{ 즉, } (X \ Y) \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

정리하면, 주어진 타원은 $3X^2 + 7Y^2 = 9$ 로 쓸 수 있다.