초월함수의 다항함수로의 근사 및 극한 구하기 문제에의 적용

한국고등학교 3학년 1반 0번 수호랑

1. 주제 및 연구 목표

수업시간에 배운 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1, \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$ 등의 초월함수 극한 공식을 이용하여 $x=0$ 근방에서 $\sin x, \tan x$등의 초월함수를 다항함수로 근사시킬 수 있음을 설명할 것이다. 또한 이러한 근사의 유용성을 초월함수 계산기 제작 연구사례, 대학수학능력시험 기출문제 별해를 제시함으로써 보일 것이다. 그리고 대학에서는 이를 확장하여 테일러 정리라는 이름으로 배운다는 것을 조사할 것이다.

2. 연구 동기

평소 초월함수는 다항함수에 비해 까다로운 함수라고 배웠다. 그런데 수업 시간에 비록 정확한 값은 아니더라도 적절히 오차범위 내에서 초월함수를 쉬운 다항함수로 근사시켜 생각할 수 있음을 알고 나서, 그 효과를 자세히 연구하고 싶었다. 또한 테일러 급수를 이용해 $\sin x$를 x뿐 아니라 더 정확한 삼차함수, 오차함수 등으로 근사시킬 수 있다는 말을 듣고 이를 이해하고 싶어 연구하게 되었다.

3. 관련된 수학 개념, 정의, 정리 (심화수학 I 내) …출처1

정리

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ (2) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$ (3) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$

(4) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ (5) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

(6) $\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}$ (7) $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$

정의

$$e=\lim_{x\to 0+}(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

4. 선행연구

복잡한 초월함수를 다항함수로 근사시킨 연구는 많이 찾아볼 수 있다. 예를 들어, 아래와 같이 log 함수를 4차 이상의 다항함수로 나타내는 것은 보다 효율적으로 지수, 로그를 연산하는 계산기 설계에 이용되었다. … 출처2

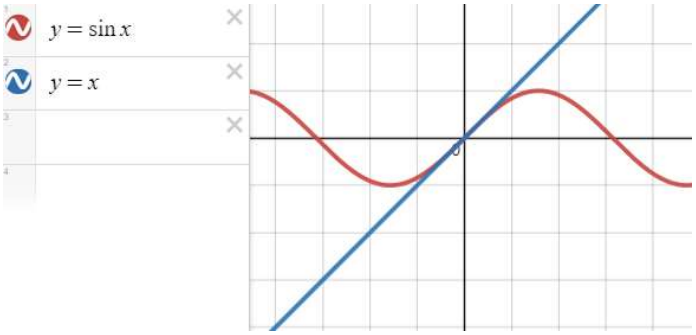
$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-(-1)^n}{n}x^n$$
$$=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots \quad (-1<x\le 1)$$
$$\log_2(1+x)=(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots)\times log_2 e \qquad (-1<x\le 1)$$

5. 탐구 내용

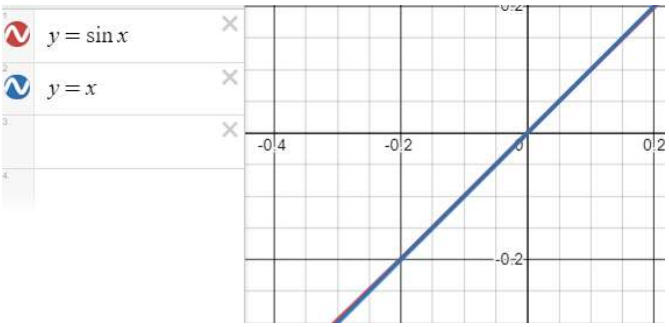
먼저 교과서에 나온 극한 기본 공식을 이용해 $\sin, \cos, \tan$ 함수를 $x=0$ 근방에서 다항식으로 근사시키면 다음과 같다. … 출처3

극한 공식	근사
$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$	$x\to 0$일 때, $\sin x \approx x$
$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$	$x\to 0$일 때, $\tan x \approx x$
$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$	$x\to 0$일 때, $\cos x \approx 1-\frac{1}{2}x^2$

실제로 아래와 같이 $x=0$ 근방이 아닌 실수 전체를 정의역으로 할 때는 연속성, 미분계수, 증감, 함숫값의 최대 최소 등 모든 성질이 구별되는 두 함수가 $x=0$ 근방에서는 거의 같은 함수가 됨을 알 수 있다.

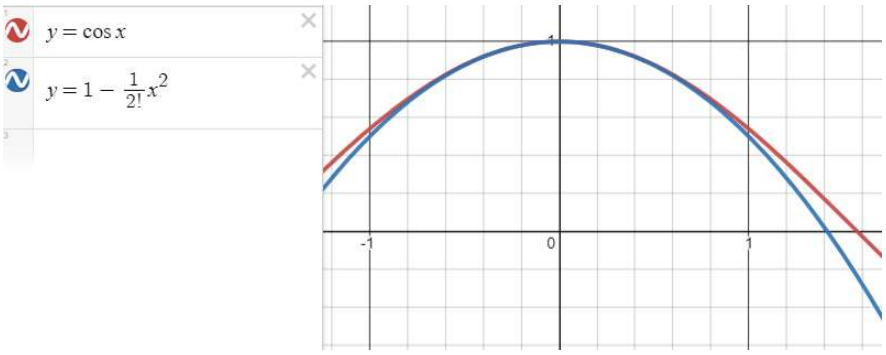


<정의역 $[-4,5]$에서의 함수 $y=x, y=\sin x$의 그래프 개형>

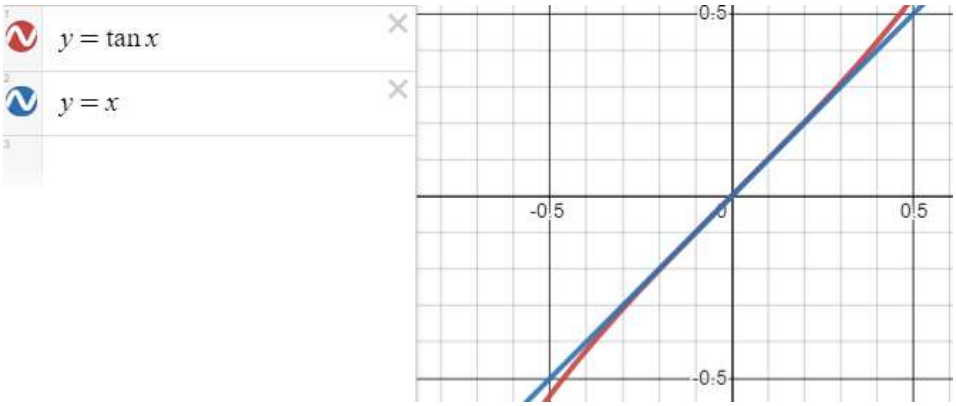


<정의역 $[-0.4, 0.2]$에서의 함수 $y=x, y=\sin x$의 그래프 개형>

비슷하게 $x=0$ 근방에서 $y=\tan x$ 함수 역시 $y=x$와 $y=\cos x$ 역시 $y=1-\frac{1}{2}x^2$와 비슷함을 알 수 있다.



<$x=0$ 근방에서 함수 $y=\cos x$, $y=1-\frac{1}{2}x^2$의 그래프>

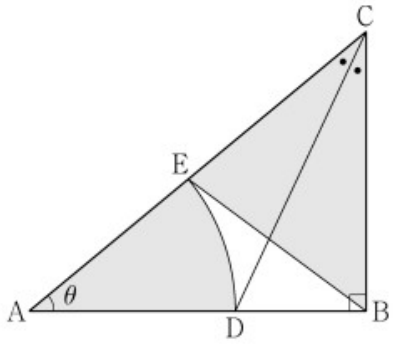


<$x=0$ 근방에서 함수 $y=\tan x$, $y=x$의 그래프>

복잡한 초월함수의 극한을 구하는 문제에서는 위와 같은 다항함수로의 근사가 문제해결을 쉽게 해 줄 때가 많다. 예를 들어 아래 수능 문제를 근사를 이용하지 않은 풀이, 근사를 이용한 풀이 2가지로 풀어보자. …출처4

문제

그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\angle B=\frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형 ABC에서 $\angle C$를 이등분하는 직선과 선분 AB의 교점을 D, 중심이 A이고 반지름의 길이가 $\overline{AD}$인 원과 선분 AC의 교점을 E라 하자. $\angle A=\theta$ 일 때, 부채꼴 ADE의 넓이를 $S(\theta)$, 삼각형 BCE의 넓이를 $T(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0}\frac{\{S(\theta)\}^2}{T(\theta)}$의 값은?



고등학교 교육과정 범위에서는 아래와 같이 푸는 것이 일반적이다.

$\triangle ABC$에서 $\overline{AB}=1$이고 $\angle A=\theta$ 이므로 $\overline{AC}=\frac{1}{\cos\theta}$, $\overline{BC}=\tan\theta$이다. $\overline{AE}=k$라 하면, $\overline{BE}=1-k$이고 $\triangle ABC$에서 삼각형 내각의 이등분선의 성질에 의하여,

$$k:1-k=\frac{1}{\cos\theta}:\tan\theta$$

정리하면,

$$k=\frac{1}{1+\sin\theta}.$$

따라서, $S(\theta)=\frac{1}{2}k^2\theta=\frac{\theta}{2(1+\sin\theta)^2}$ … ①

한편, $\overline{CD}=\overline{AC}-\overline{AD}=\overline{AC}-k=\frac{1}{\cos\theta}-\frac{1}{1+\sin\theta}$ 이므로,

$$\overline{CD}=\frac{1+\sin\theta-\cos\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)}.$$

따라서, $\triangle BCD$에서,

$$T(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{CD}\times\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)$$
$$=\frac{\sin\theta\times(1+\sin\theta-\cos\theta)}{2\cos\theta(1+\sin\theta)}$$ 이다.

①, ②에 의하여,

$$\frac{S^2(\theta)}{T(\theta)}=\frac{2\theta^2\cos\theta(1+\sin\theta)}{4(1+\sin\theta)^4\sin\theta(1+\sin\theta-\cos\theta)}.$$

분모, 분자에 각각 $1+\sin\theta+\cos\theta$를 곱하면,

$$\frac{S^2(\theta)}{T(\theta)}=\frac{2\theta^2\cos\theta(1+\sin\theta)(1+\sin\theta+\cos\theta)}{4(1+\sin\theta)^4\sin\theta(1+\sin\theta-\cos\theta)(1+\sin\theta+\cos\theta)} \quad \cdots③$$

$$=\frac{\theta^2\cos\theta\,(1+\sin\theta+\cos\theta)}{2(1+\sin\theta)^3\sin\theta\times 2\sin\theta(\sin\theta+1)}$$

$$=\frac{1}{4}\times\frac{\cos\theta\,(1+\sin\theta+\cos\theta)}{(1+\sin\theta)^4}\times\left(\frac{\theta}{\sin\theta}\right)^2 \quad \to\frac{1}{4}\times\frac{1\times(1+0+1)}{(1+0)^4}\times 1^2=\frac{1}{2}.$$

$$\left(\because\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{\sin\theta}=1\right)$$

위 풀이에서 보다시피 고등학교 2학년 수학Ⅱ에서 배우는 다항함수의 극한과 달리 삼각함수를 비롯한 초월함수 극한값 구하기는 식이 복잡한 경우가 많다. (③을 보라.) 하지만 위에서 설명하였듯이 $\theta=0$ 근처에서 $\sin\theta$는 θ로, $\cos\theta$는 $1-\frac{1}{2}\theta^2$로, 심지어 더 간단하게 $\cos\theta\approx 1$로 근사시켜 풀어도 됨을 이용하면 아래와 같이 분모, 분자가 모두 다항함수인 쉬운 함수 극한 문제로 바꾸어 풀 수 있다.

별해

$\theta\to 0$일 때, $\sin\theta$ 대신 θ를, $\cos\theta$ 대신 1을 대입하면,

$$\frac{S^2(\theta)}{T(\theta)}=\frac{2\theta^2\cos\theta(1+\sin\theta)}{4(1+\sin\theta)^4\sin\theta(1+\sin\theta-\cos\theta)}\approx\frac{2\theta^2\times 1\times(1+\theta)}{4(1+\theta)^4\times\theta\times\theta}$$

$$=\frac{1}{2(1+\theta)^3}\to\frac{1}{2}.$$

삼각함수 외에도 여러 가지 초월함수에 관한 극한으로부터 아래와 같이 다양한 근사를 얻을 수 있다.

극한 공식	근사
$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$	$x\to0$일 때, $\ln(1+x)\approx x$
$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$	$x\to0$일 때, $e^x-1\approx x$
$\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}$	$x\to0$일 때, $\log_a(1+x)\approx\frac{x}{\ln a}$
$\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$	$x\to0$일 때, $a^x-1\approx x\ln a$

이를 응용하면 여러 문제해결이 쉬워지는데 아래 또한 그 예 중 하나이다. …출처5

문제

다음의 극한값을 구하여라.

$$\lim_{x\to1}\frac{(2x+5)(3^{x-1}-1)}{\ln(4x^2-3)}$$

풀이) $(\text{준식})=\lim_{x\to1}\frac{(2x+5)(3^{x-1}-1)}{\ln(4x^2-4+1)}=\lim_{\substack{x-1\to0\\4x^2-4\to0}}\frac{(2x+5)\times ln3\times(x-1)}{4x^2-4}$

$$=\frac{7\ln3}{16}.$$

위와 같이 근사를 이용하여 (분모), (분자)가 모두 다항식인 함수로 바꿔 풀면 다항식의 가장 큰 장점 중 하나인 인수분해를 이용하는 기회를 만들 수도 있음을 알 수 있다.

일찍부터 수학자들은 이와 같이 다항함수를 비롯한 대수함수가 초월함수보다 훨씬 다루기 쉬운 함수임을 잘 알고 있었다. 그래서 초월함수를 대수식, 다항식으로 나타내려는 많은 노력을 기울였으나 쉽지 않았다. 대신, 어느 정도 비슷하게 근사시키는 법을 알게 되었는데 이는 대학교 수학 중 해석학에서 테일러 근사(Taylor Approximation)라는 개념으로 소개되며 여기서는 증명을 생략하고 결과만 소개하겠다. Taylor 정리는 다음과 같다. …출처6

Taylor 정리

함수 $f(x)$가 $k+1$번 미분가능한 함수이고 h가 충분히 작은 양수일 때, 다음이 성립한다.

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)\times h+\frac{f''(x_0)}{2!}\times h^2+\cdots+\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k+R_k(x_0,h).$$

(단, $R_k(x_0,h)=\int_{x_0}^{x_0+h}\frac{(x_0+h-\tau)^k}{k!}f^{(k+1)}(\tau)d\tau.$)

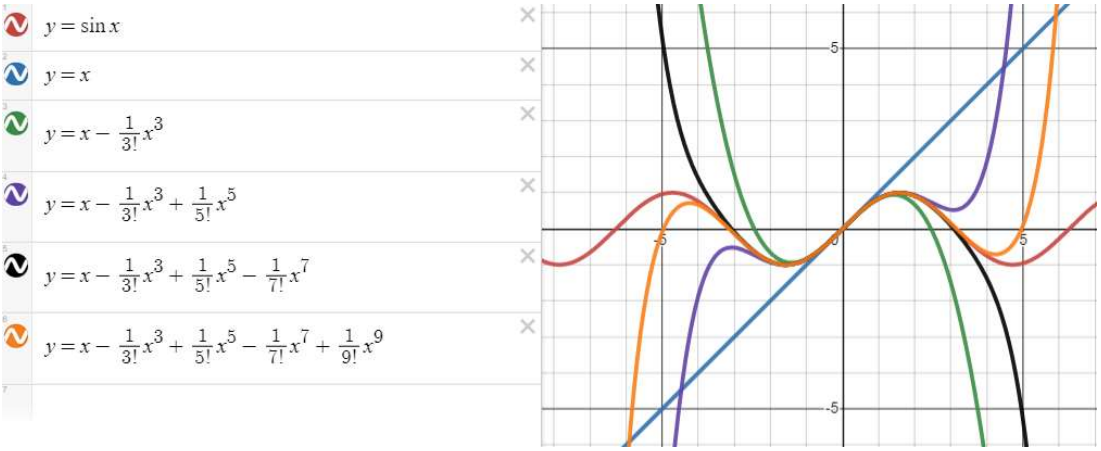
여기서 $R_k(x_0,h)$는 근사오차에 해당하므로 이번 연구에서는 무시해도 좋다. 위 정리를 $x_0=0$으로 두고, $\sin x$에 대해 간략히 쓰면 아래와 같다.

$$\sin x \approx x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots$$

비슷하게 $y=\cos x$ 역시 아래와 같이 테일러 근사시킬 수 있음을 알 수 있다.

$$\begin{aligned}f(x)=\cos x &\approx f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots\\ &=\cos 0+\frac{(-\sin 0)}{1!}x+\frac{(-\cos 0)}{2!}x^2+\frac{(\sin 0)}{3!}x^3+\cdots\\ &=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots\end{aligned}$$

근사된 다항식의 차수가 높을수록 더 정확히 근사됨을 아래와 같이 그래프를 통해 직관적으로 이해할 수 있다.



6. 연구 결과

연구 목표에서 제시한 대로, 초월함수의 극한 공식을 통해 여러 가지 초월함수를 다항함수로 근사시킬 수 있음을 보였다. 아래는 그 예시 중 하나이다.

극한 공식	근사
$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$	$x\to 0$일 때, $\sin x \approx x$

또한 Taylor 정리를 이용하면 사인함수는 위와 같은 일차함수 뿐 아니라 삼차함수, 오차함수 등 홀수차수의 다항함수로 더 자세히 근사시킬 수 있음을 확인하였다.

이를 이용해 수능 기출문제를 훨씬 더 짧고 간단하게 풀 수 있었고 선행연구를 통하여 이러한 다항함수로의 근사가 실제 산업에서도 유용하게 쓰이는 내용임을 확인하였다.

7. 연구 요약

심화수학 I 수업 시간에 초월함수의 극한에 대한 다양한 공식을 배우고 이를 초월함수의 다항함수로의 근사에 적용시킬 수 있음을 조사하였다. 이 결과를 확장한 Taylor 정리에 대해 조사하였으며 정확한 증명 대신 그래프를 통해 직관적으로 이해하였다.
수능기출문제 풀이에 이를 적용하여 풀이를 간소화하는 등의 성과 또한 있었다.

8. 배운 점, 느낀 점

① 초월함수의 다항함수로의 근사가 실제로 수능문제를 풀 때 유용함을 느낄 수 있었을 뿐 아니라, 역사적으로도 의미가 있었음을 Taylor 수학자를 통해 알 수 있었다.

② 논문을 통하여 다항함수로의 근사가 실제 산업에 쓰이고 있다는 것을 확인할 수 있어 지금 배우고 있는 수학이 시험을 위한 공부에 그치지 않고 쓰임새가 있다는 것을 느낄 수 있었다.

③ 수능 문제를 근사를 이용하여 조금 더 간단한 풀이로 풀 수 있었던 점은 충분히 의미있었다. 하지만 그만큼 근사를 이용하지 않고 오직 교과서에 있는 극한 식만을 갖고 복잡한 초월함수 극한값을 구해내는 과정 또한 중요하며 이러한 복잡한 과정을 능숙하게 처리하는 것 또한 수학적 능력 중 하나임을 알 수 있었다.

④ 삼각함수, 지수함수, 로그함수에 관한 복잡한 극한들을 처음 보았을 때 '왜 이런 것을 배우지?'하고 생각했지만 이번 연구를 통하여 공식의 유용성을 알게 되었고 앞으로도 수학 공부를 할 때 잘 와닿지 않는 공식이나 정리가 있으면 그 쓰임새를 조사해 보면서 스스로 동기를 부여해야겠다는 것을 느낄 수 있었다.

⑤ 앞으로 수학 교사가 되는 것이 꿈인데 이와 같이 교과서에 잘 드러나지 않는 의미 등을 학생들에게 알려주면서 조금 더 유의미한 수학 수업을 해야겠다는 것을 알 수 있었다.

9. 출처

출처1) 김완일, 「심화수학 Ⅰ」(전라북도교육청, 2018), 180-185.
출처2) 김동희·심정섭, 「다항식 곱셈을 이용한 근사패턴매칭의 CUDA 구현」, 『정보과학회논문지』, 40(2013), 3.
출처3) 차민경, 초월함수의 극한과 다항함수로의 근사, 2018.10.01., http://cha9518.blogspot.com/2016/06/2022-9.html
출처4) 한국교육과정평가원, 2019학년도 대학수학능력시험 기출문제 수학(홀수형), 2019.05.14., http://kice.re.kr/
출처5) 차민경, 초월함수 극한 관련 예시 모음, 2018.10.02., http://cha9518.blogspot.com/2018/06/312-15.html
출처6) Bartle, 「실해석학개론 4판」(텍스트북스, 2019), 162.