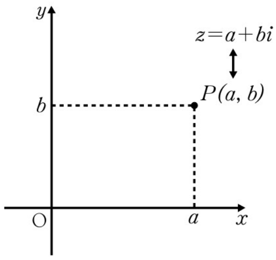
2026. 1학기. 학교연합 공동교육과정 고급수학I	학교:
16. [복소수와 극형식] 복소평면, 복소수의 극형식	이름:

학습목표: 복소평면을 이해할 수 있다.
복소수의 극형식을 이해하고, 복소수를 극형식으로 나타낼 수 있다.
복소수의 극형식의 유용성을 인식할 수 있다.

정의 복소평면

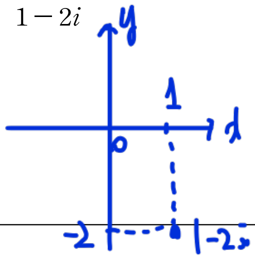
복소평면 : 복소수 $a+bi$(단, a,b는 실수)를 점 $P(a,b)$에 대응시킨 평면
(x축을 실수축, y축을 허수축 이라 한다.)



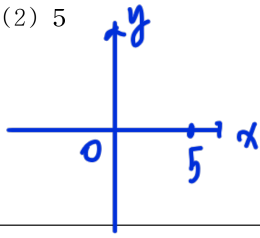
문제

다음 복소수를 복소평면 위에 나타내시오.

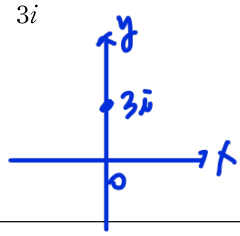
(1) $1-2i$



(2) 5



(3) $3i$



정의 복소수의 절댓값

복소수 $z=a+bi$(a,b는 실수)에 대해,

$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

와 같이 정의한다.

정의	복소수의 극형식

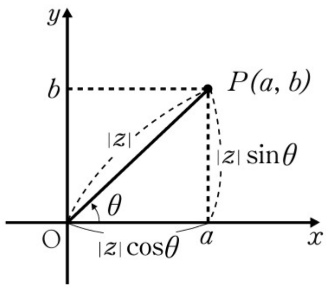
복소평면 위의 0이 아닌 복소수 $z=a+bi$(단, a,b는 실수)에 대해,

복소수 z의 <u>극형식 $P(z)$: $r(\cos\theta+i\sin\theta)$</u>

└ r :복소평면에서 O와 $P(z)$사이 거리 ($\therefore r=$ <u>$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$</u>)

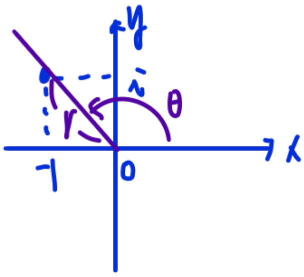
└ θ :복소평면에서 선분 OP와 실수축의 양의 방향의 교각의 크기

(이 각 θ를 z의 <u>편각</u>이라 하고 <u>$\arg(z)$</u>라고 쓴다.)



예	

복소수 $z=-1+i$를 극형식으로 나타내시오.



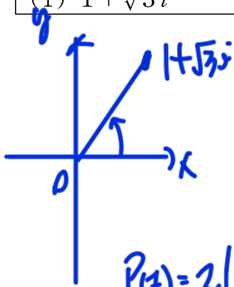
$\theta=\frac{3}{4}\pi$, $r=\sqrt{2}$ 이므로,

$P(z)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$

문제	

다음 복소수를 극형식으로 나타내시오.

(1) $1+\sqrt{3}i$ (2) $-2-2i$



$P(z)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi\right)$

문제	
극형식으로 표현된 다음 복소수를 $a+bi$ 꼴로 나타내시오. (1) $z = -2\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ (2) $z = \sqrt{3}\left(\cos\frac{7\pi}{3} + i\sin\frac{7\pi}{3}\right)$	

생략

정리	오일러 공식(Euler's Formula)
절댓값이 1이고 편각이 θ인 복소수 $\cos\theta + i\sin\theta$를 단위 복소수라고 하고, 기호로 $e^{i\theta}$ 라고 나타낸다고 알려져 있다. 즉, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ (오일러 공식) 이다. 이에 따라, 절댓값이 r이고 편각이 θ인 복소수는 $re^{i\theta}$ 으로 나타낸다.	

e는 자연상수

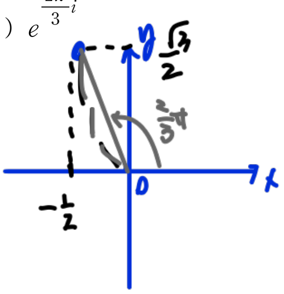
(증명) 영상 참조 (https://cha-record.studio/eulerf/)

문제	

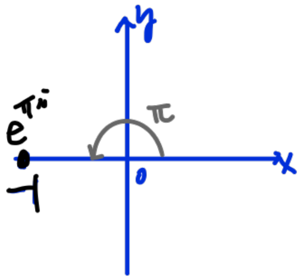
다음 복소수를 $a+bi$(단, a, b는 실수) 꼴로 나타내고, 좌표평면 위에 나타내시오.

생략

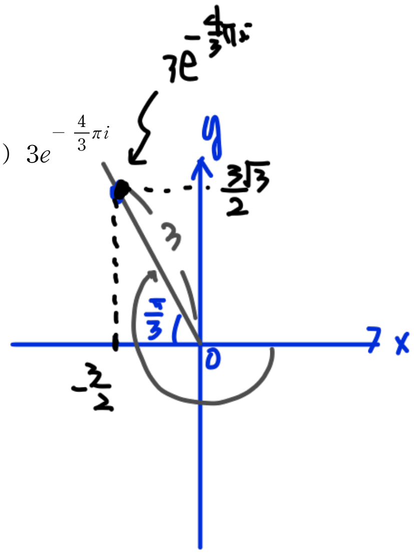
(1) $e^{\frac{2\pi}{3}i}$



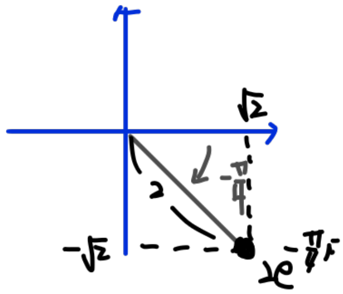
(2) $e^{\pi i}$



(3) $3e^{-\frac{4}{3}\pi i}$



(4) $2e^{-\frac{\pi i}{4}}$



예	
다음은 복소수 $z_1 = 2e^{\frac{2}{3}\pi i}$ 와 $z_2 = 3e^{\frac{\pi i}{3}}$ 의 곱 $z_1 z_2$를 구하는 과정이다. 물음에 답하시오. (1) z_1, z_2를 모두 $a+bi$ 꼴로 나타낸 뒤, 이를 이용하여 $z_1 z_2$를 계산하시오. (2) z_1, z_2의 극형식을 이용하여 $z_1 z_2$를 계산하시오. (단, 복소수 지수에서도 지수법칙 성립) (3) (1),(2) 중 복소수 곱셈에 더 편리한 것은 무엇이라고 생각하는가??	

(1). 복소수 표현 $a+bi$ 이용	(2). 복소수 극형식 표현 $re^{i\theta}$ 이용
$z_1 = 2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$ $= 2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1+\sqrt{3}i$ $z_2 = 3e^{\frac{\pi}{3}i} = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ $= 3\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$ $z_1 z_2 = (-1+\sqrt{3}i)\left(\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)$ $= -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i + \frac{3\sqrt{3}}{2}i - \frac{9}{2} = -6$	$z_1 = 2e^{\frac{2}{3}\pi i}$, $z_2 = 3e^{\frac{\pi}{3}i}$ 이므로, $z_1 z_2 = 2\times 3 \times e^{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)\pi i}$ $= 6e^{\pi i}$ $= 6(\cos\pi + i\sin\pi) = -6$
(3)	

정리	복소수의 곱과 몫
두 복소수 $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$와 $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$에 대해 다음이 성립한다. (1) 곱 $z_1 z_2 =$ $r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ (2) 몫 $\dfrac{z_1}{z_2} =$ $\dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$	

문제	교류 전류 구하기
전압이 V (크기 100, 위상 30°), 회로의 임피던스(저항)가 $Z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} i$인 교류 전류 I를 구하시오.	

note. 옴의 법칙 : $I = \dfrac{V}{Z}$

풀이1. 복소수 표현 $a+bi$ 이용	풀이2. 복소수 극형식 표현 $re^{i\theta}$ 이용
$V = 100(\cos 30° + i\sin 30°)$ $= 100\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 50\sqrt{3} + 50i$ $Z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 이므로, $I = \dfrac{V}{Z} = \dfrac{50\sqrt{3}+50i}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$ $= \dfrac{(50\sqrt{3}+50i)\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}$ $= \cdots$	$V = 100e^{\frac{\pi}{6}i}$, $Z = e^{\frac{\pi}{3}i}$ 이므로, $I = \dfrac{V}{Z} = \dfrac{100e^{\frac{\pi}{6}i}}{e^{\frac{\pi}{3}i}}$ $= 100e^{-\frac{\pi}{6}i}$ $= 100\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$ $= \underline{50 - 50\sqrt{3}i}$
실제 공학수학 풀이	
$V = 100\angle 30°$, $Z = \angle 60°$ 이므로, $I = \dfrac{V}{Z} = 100\angle(30°-60°) = 100\angle(-30°) = 100\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$ $= \underline{50 - 50\sqrt{3}i}$	

면접대비	
교류 전류 구하기 문제 상황에서 알 수 있는 복소수 극형식 표현의 장점은 무엇이라고 생각하나요? 자신의 생각을 정리해 봅시다.	

2026. 1학기. 학교연합 공동교육과정 고급수학I	학교:
17. [복소수와 극형식] 드 무아브르 정리	이름:

앞서, 복소수의 극형식이 두 복소수의 곱셈과 나눗셈에 유용함을 배웠다. 만약 큰 유용함을 느끼지 못했다면 곱 또는 몫의 횟수를 늘릴수록 그 유용성을 더 크게 체감할 수 있을 것이다.

정리	드 무아브르 정리
복소수 $z = re^{i\theta}$와 임의의 정수 n에 대하여 다음이 성립한다. $z^n = r^n e^{in\theta}$	

(증명)

1) n이 자연수일 때, 수학적 귀납법으로 증명 가능하다(생략)

2) $n=0$일 때, $z^n = z^0 = 1 = 1\times 1 = r^0 \times e^{i\theta\times 0} = r^n \times e^{in\theta}$ 성립.

3) n이 음의 정수일 때, $1 = (e^{i\theta})^n (e^{i\theta})^{-n} = e^{in\theta}(e^{i\theta})^{-n}$이므로, $(e^{i\theta})^{-n}$은 $e^{in\theta}$의 곱셈에 대한 역원. 따라서, $(e^{i\theta})^{-n} = e^{-in\theta}$이다. 이하 생략.

예	
$(\sqrt{3}-i)^{18}$을 계산하여라.	

풀이1. 일일이 제곱	풀이2. 이항정리 이용
$(\sqrt{3}-i)^{18} = \{(\sqrt{3}-i)^2\}^9$ $= (3+(-1)-2\sqrt{3}i)^9$ $= (2-2\sqrt{3}i)^9$ $= \{(2-2\sqrt{3}i)^3\}^3 = \cdots$ 생략	$(\sqrt{3}-i)^{18} = \sum_{k=0}^{18} {}_{18}C_k (\sqrt{3})^k \times (-i)^{18-k}$ $= \cdots$

풀이3. 드 무아브르 정리 이용

$(\sqrt{3}-i)^{18} = \left(2e^{-\frac{\pi}{6}i}\right)^{18} = 2^{18}\times e^{-3\pi i} = 2^{18}\times(\cos(\cancel{-3\pi})^{-1} + i\sin\cancel{3\pi}^{0})$

$= -2^{18}$

문제	

다음 복소수를 간단히 하여라.

(1) $(-1-\sqrt{3}i)^9$ (2) $(1-i)^{15}$

(3) $\left\{\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{14}+i\sin\frac{\pi}{14}\right)\right\}^{21}$ (4) $\left(\frac{1+i}{-\sqrt{3}+i}\right)^{12}$

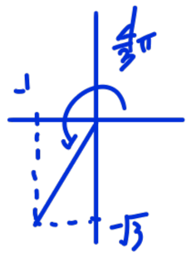
(1) $(-1-\sqrt{3}i)^9$

$= \left(2e^{\frac{4}{3}\pi i}\right)^9$

$= 2^9 \times e^{12\pi i}$

$= 2^9(1+0i)$

$= 2^9$



문제	[전자공학] 신호 증폭기를 통한 신호 처리
어떤 신호 증폭기는 신호를 한 번 통과시킬 때마다 복소수 $H=\sqrt{3}+i$를 곱하게 되어 있다고 한다. 공학자가 최초 신호 $V_{in}=10\angle 0^\circ$를 크게 증폭시키기 위해 증폭기 6대를 직렬 연결할 때, 최종출력 신호 V_{out}을 구하시오.	

hint: $V_{out} = H^6 \times V_{in}$

풀이) $V_{out} = H^6 \times V_{in}$

$= (\sqrt{3}+i)^6 \times 10\angle 0^\circ$

$= \left(2e^{\frac{\pi}{6}i}\right)^6 \times 10e^{0\pi i}$

$= 2^6 \times e^{\pi i} \times 10 \times 1$

$= 10 \times 2^6 \times \underbrace{e^{\pi i}}_{-1}$

$= -640$

문제	[전자공학] 노이즈 캔슬링 구현
어떤 음향 작업에서의 위상 천이기(Phasor Shifter)의 스펙은 $H=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$라고 한다. 이 위상 천이기를 직렬로 몇 개 연결하면 노이즈 캔슬링 신호를 구현할 수 있겠는가?	

hint: $V_{out}=$ $-V_{in}$ 이 되는 자연수 n을 찾으면 된다.

$V_{out}=H^nV_{in}$ 이라 두자.

$V_{out}=-V_{in}$ 이어야 하므로,

$-\cancel{V_{in}}=H^n\cancel{V_{in}}$

$\therefore H^n=-1$ ―― ㉠

$H^n=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^n=\left(e^{\frac{\pi}{6}i}\right)^n=e^{\frac{\pi}{6}ni}$ ― ㉡

드무아브르 rh

㉠,㉡에 의해,

$e^{\frac{\pi}{6}ni}=\underbrace{-1}_{=e^{\pi i}}$

$\therefore n=6$

6개

면접대비	
전자공학의 신호 처리 상황에서 알 수 있는 드 무아브르 정리의 유용성은 무엇이라고 생각하나요? 자신의 생각을 정리해 봅시다.	

정리	대수학의 기본정리
복소수 계수를 갖는 n차 다항식은 복소수 범위에서 적어도 하나의 근을 갖는다. (따라서 n개의 근을 갖는다.)	

증명생략 $P_n(x)$: n차 다항식. (WLOG, 최고차항 계수: 1)

대수학기본정리에 따라, $P_n(x)$는 적어도 하나의 근 α_1 가지므로,

$P_n(x) = (x-\alpha_1)(\cdots\cdots)$ 이다.

$n-1$차 다항식 $\dfrac{P_n(x)}{x-\alpha_1}$ 역시 적어도 하나의 근 α_2를 가지므로,

$\dfrac{P_n(x)}{x-\alpha_1} = (x-\alpha_2)(\cdots)$ $\cdots$(중략)$\cdots$ $\dfrac{P_n(x)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_{n-1})} = x-\alpha_n$

$\therefore P_n(x)$: n개의 근 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 갖는다.

예	
삼차방정식 $z^3 = 1$의 근을 복소수 범위에서 모두 구하시오.	

$z^3=1 \iff z^3-1^3=0 \iff (z-1)(z^2+z+1)=0$

$z: 1$ $\quad$ $z: \dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

총 3개

정리	복소수 ω의 n제곱근
자연수 n에 대하여 복소수 $w = R(\cos\psi + i\sin\psi)$의 서로 다른 n제곱근은 $z_k = r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{\psi+2k\pi}{n}i} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\psi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\psi+2k\pi}{n}\right)$ 이다. (단, $k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$)	

(증명)

$z = e^{i\theta}$를 w의 n제곱근이라 하자. 그러면 $\underbrace{z^n = w = Re^{\psi i}}_{㉠}$

드무아브르정리에 의해,

$$z^n = |z|^n e^{in\theta} \quad \text{———} \; ㉡$$

이므로 ㉠, ㉡에 의해,

$$|z|^n e^{in\theta} = R e^{i\psi}$$

$|z| = R^{\frac{1}{n}}$ — ㉢ $\quad n\theta = 2k\pi + \psi$ (k:정수)

$$\therefore \theta = \frac{2k\pi+\psi}{n} \quad (k = 0, 1, \cdots, n-1) \; \text{—} \; ㉣$$

㉢ ㉣에 의해,

$$z = |z|e^{i\theta} = \underbrace{R^{\frac{1}{n}} \times e^{\frac{2k\pi+\psi}{n}i}}_{} \quad (k = 0, 1, \cdots, n-1)$$

이를 z_k라 하면,

$$z_k = R^{\frac{1}{n}} e^{\frac{2k\pi+\psi}{n}i} \quad (k = 0, \cdots, n-1)$$

문제
복소수 1의 6제곱근을 복소수 범위에서 모두 구하고 복소평면에 나타내시오.

$w = 1 = 1 \times e^{0i}$

$z_k \ (k=0,1,\cdots,5)$

$z_k = 1^{\frac{1}{6}} \times e^{\frac{0+2k\pi}{6}i} \quad (k=0,1,\cdots,5)$

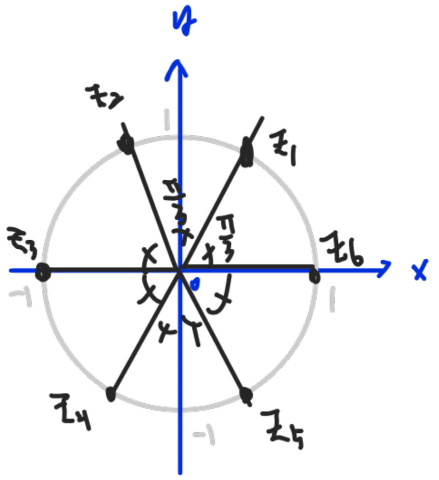
$= e^{\frac{k}{3}\pi i} \quad (k=0,1,\cdots,5)$

$\therefore z_1 = e^{\frac{\pi}{3}i}$

$z_2 = e^{\frac{2}{3}\pi i}$

$z_3 = e^{\pi i}$

$\vdots$



문제
복소수 $i+1$의 5제곱근을 복소수 범위에서 모두 구하고 복소평면에 나타내시오.

면접대비	
자연수 계수 방정식의 근 중에는 자연수가 아닌 것이 있어 수를 유리수로 확장하였다.(:㉠) 유리수 계수 방정식의 근 중에는 유리수가 아닌 것이 있어 수를 실수로 확장하였다.(:㉡) 실수 계수 방정식의 근 중에는 실수가 아닌 것이 수를 복소수로 확장하였다.(:㉢) 물음에 답하시오. (1) ㉠~㉢에 알맞은 방정식의 예를 하나씩 쓰시오. ㉠: $2x-1=0$ ㉡: $x^2=2$ ㉢: $x^2=-1$ (2) 복소수체계에서부터는 수 체계를 더 확장할 필요가 없는 이유는 무엇일까? 대수학의 기본정리와 인수 정리 등을 적절히 이용하여 본인의 생각을 논리적으로 적어보세요. n차 방정식 $z^n=R$는 복소수 범위에서 n개 근 z_k $(k=0,1,\cdots,n-1)$를 갖는다.	